

2章 線形破壊力学の理論

本章では、線形破壊力学における基礎的な事柄を説明する。線形破壊力学は、線形弾性論に基づいているので、まず応力とひずみ、Hookeの法則から少しいねいに復習する。物体の応力、変位の計算を平面問題、面外せん断問題という2次元の場合に限ることにすると、複素関数を用いる方法がきわめて有効となるが、これについて説明する内容は半逆解法 (semi-inverse method) にとって必要な程度のものである。基本的なき裂問題に対しては簡単な形となり、き裂の変形モードとも対応がつく Westergaardの応力関数については少しいねいに説明し、具体的な問題に対しては主としてこれを用いることにする。以上の後に基本的なき裂の弾性問題をとりあげてき裂先端近傍の応力場・変位場の特性を調べ、この特性が一般的なものであることから応力拡大係数 K のもつ重要性を示す。多くの問題に対する応力拡大係数は使いやすい形にまとめられているが¹⁻³⁾、応力拡大係数の基本的な求め方とその数例を説明する。さらにき裂進展前後のエネルギー変化を考え、エネルギー解放率 g という重要な量、およびこれと K との関係、破壊力学を拡張するうえでも有用と考えられている J 積分との関係を説明する。以上のことから K または g で破壊条件式を表すことが妥当であるとする線形破壊力学の基本的立場が理解されよう。最後に、き裂先端の塑性変形領域が小さい場合にもこの形の破壊条件式が妥当であることを代表的なモデルに基づいて説明する。

2.1 応力とひずみ⁴⁻⁶⁾

〔1〕 応 力 物体に外力が加えられると、物体中の隣り合うどの部分も互いに外力の作用に抗するような力（内力）をおよぼし合う。このため、物体にある程度の外力が作用しても連続物体としての結合が破れることはない。外力に応じて物体内に生ずるこのような内力は、作用面としてどの面を考えるかを指定することによってはじめて明確に記述される。図2.1に示す物体内の点Pにおいて面積 ΔS の面要素を考え、その単位法線ベクトルを n とする。面 ΔS の n 側の物質が $-n$ 側の物質（斜線を施した側）の物質におよぼす力を $\Delta T^{(n)}$ とする。この表記法では、面 ΔS の $-n$ 側の物質が n 側の物質におよぼす力は $\Delta T^{(-n)}$ であり、作用・反作用の法則により

$$\Delta T^{(-n)} = -\Delta T^{(n)} \quad (2.1a)$$

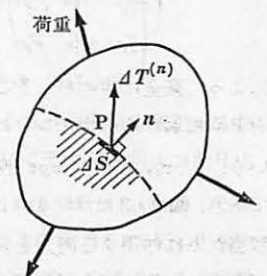


図 2.1 面に作用する内力

である。 $\Delta S \rightarrow 0$ の極限で定義されるベクトル

$$T^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta T^{(n)}}{\Delta S} \quad (2.2)$$

は、法線ベクトルが n である面の n 側の物質が $-n$ 側の物質におよぼす単位面積当たりの力である。これを応力ベクトル (stress vector) という。式 (2.1a) より

$$T^{(-n)} = -T^{(n)} \quad (2.1b)$$

である。点 P において考えうる面要素 (いいかえれば、法線ベクトル n) は無限に存在するが、これらの内のどの面に作用する応力ベクトルも、三つの面 (n_1, n_2, n_3) に作用する応力ベクトル $T^{(n_1)}, T^{(n_2)}, T^{(n_3)}$ を用いて表すことができる。その際、三つの面は法線ベクトル n_1, n_2, n_3 が一次独立であればどう選んでもよい。特に直角座標 x, y, z の座標面に作用する応力ベクトル $T^{(i)}, T^{(j)}, T^{(k)}$ を用いて法線ベクトル n なる面に作用する応力ベクトル $T^{(n)}$ を表すと

$$T^{(n)} = (n \cdot i) T^{(i)} + (n \cdot j) T^{(j)} + (n \cdot k) T^{(k)} \quad (2.3a)$$

となる。ただし、ベクトルの内積 (スカラー積) を $(\cdot)$ で表してある。これは、図 2.2 に示す微小四面体部分に作用する力のつり合いの式で $dx, dy, dz \rightarrow 0$ とすることにより得られる。ベクトル $n, T^{(n)}$ の成分を $(n_x, n_y, n_z), (T_x^{(n)}, T_y^{(n)}, T_z^{(n)})$ とし、 $T^{(i)}, T^{(j)}, T^{(k)}$ の成分を $(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}), (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}), (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z)$

とすると、式 (2.3a) は

$$\left. \begin{aligned} T_x^{(n)} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ T_y^{(n)} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ T_z^{(n)} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \right\} \quad (2.3b)$$

と表すことができる。式 (2.3b) から P 点における内力の状態は 9 個の成分をもつ一つの量

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

によって完全に定められることがわかる。この量を P 点における応力テンソル (stress tensor) という。 $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$ は xyz 座標系での応力の成分であり、図 2.3 に示すように、各座標面の単位面積当たりに作用する内力を表す。先の添字が作用面を示し、後の添字が作用方向を示している。面

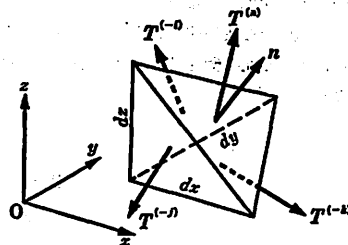


図 2.2 微小四面体に作用する応力ベクトル

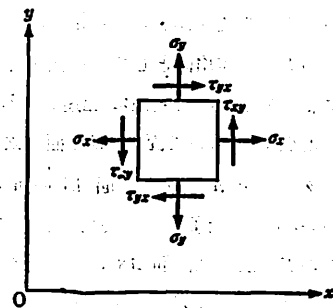


図 2.3 応力ベクトルの成分

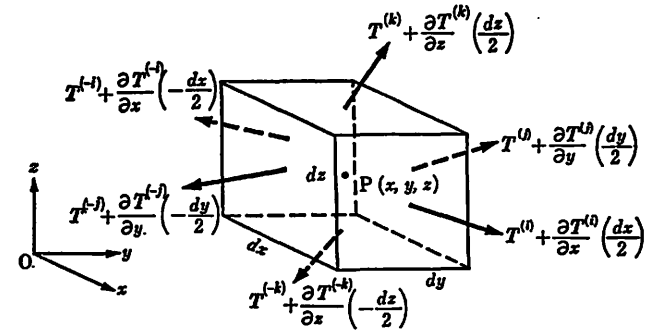


図 2.4 微小六面体に作用する応力ベクトル

に垂直方向に作用する成分 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を垂直応力 (normal stress) 成分といい、面をずらす方向に作用する成分 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 等をせん断応力 (shearing stress) 成分という。

外力の作用のもとで静的な平衡状態にある物体中に、図 2.4 に示す微小六面体部分をとる、力のつり合いを考える。 $dx, dy, dz \rightarrow 0$ とすることにより各点で

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial T^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial T^{(k)}}{\partial z} + F = 0 \quad (2.5a)$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5b)$$

が成り立つことがわかる。ここで、 $F = (F_x, F_y, F_z)$ は単位体積当たりに作用する外力である。式 (2.5a) あるいは (2.5b) を応力のつり合い式 (equations of equilibrium of stress) という。また、図 2.4 の微小部分に作用する力のモーメントのつり合いを考え、 $dx, dy, dz \rightarrow 0$ とすれば

$$i \times T^{(i)} + j \times T^{(j)} + k \times T^{(k)} = 0 \quad (2.6a)$$

をうる。ただし、ベクトルの外積 (ベクトル積) を $(\times)$ で表してある。これより

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.6b)$$

が成り立つ。この対称性により、応力の成分のうち独立なものは 6 個である。応力は、物体内の各点で式 (2.5) および (2.6) を満たしていなければならないが、物体表面 (境界) 上では境界条件を満たさなければならない。物体表面の単位面積当たりに作用する外力を Q とし、表面の外向き法線ベクトルを n とする。図 2.5 のように、表面で面積 ΔS 、厚さ Δh の微小部分をとる、これに働く力のつり合いを考えて $\Delta h \rightarrow 0$ とすれば

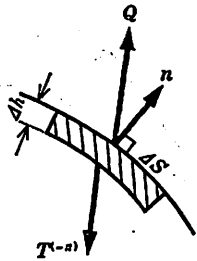
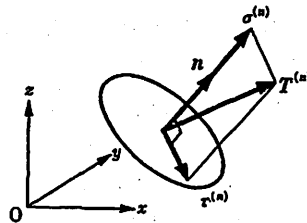
図 2.5 境界における力のつり合い
($dh \rightarrow 0$)

図 2.6 垂直応力とせん断応力

$$T^{(n)} = Q \quad (2.7)$$

である。式(2.7)は、表面外力 Q が指定されている境界部分で満たされなければならない条件であり、式(2.3b)を用いれば応力の成分で書くことができる。

さて、法線ベクトルが n である面に作用する垂直応力を $\sigma^{(n)}$ 、せん断応力を $\tau^{(n)}$ とすると、図2.6と式(2.3b)より

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{(n)} &= T^{(n)} \cdot n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2(\tau_{yz} n_y n_z + \tau_{zx} n_z n_x + \tau_{xy} n_x n_y) \\ (\tau^{(n)})^2 &= (T^{(n)} - \sigma^{(n)} n) \cdot (T^{(n)} - \sigma^{(n)} n) = (\sigma_x n_x + \tau_{yz} n_y + \tau_{zx} n_z)^2 \\ &\quad + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z)^2 + (\tau_{xz} n_x + \tau_{yx} n_y + \sigma_z n_z)^2 - (\sigma^{(n)})^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

である。各点で、 $\sigma^{(n)}$ 、 $\tau^{(n)}$ の最大値、およびこれらの作用面 n を知ることは材料の劈開破壊、せん断破壊を考える上からも重要となる。これに関連した一般的な結果のみをまとめておく。

(1) どのような応力状態にある点においても、せん断応力が0で垂直応力のみが作用しているという三つの面が存在し、これら三つの面は互いに直交する。これらの面に作用する垂直応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ としておく)を主応力 (principal stresses) という。また、主応力の作用方向を主応力方向 (principal directions of stress)、作用面を主応力面 (principal planes of stress) という。以上により、三つの主応力方向を座標軸にとれば式(2.4)の応力テンソルは

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

と表される (図2.7)。

(2) 各面 n に作用する垂直応力 $\sigma^{(n)}$ の内で、最大のものは最大主応力 σ_1 であり、最小のものは最小主応力 σ_3 である。

(3) 各面 n に作用するせん断応力 $\tau^{(n)}$ の内で、大きさが最大のもの (最大せん断応

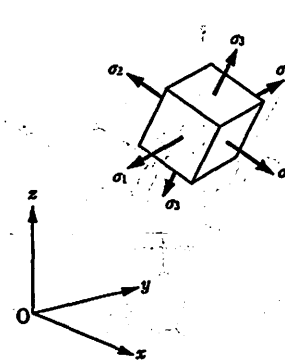


図 2.7 主応力

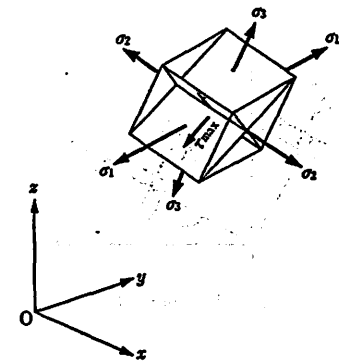


図 2.8 最大せん断応力の作用面と作用方向

力: maximum shearing stress) は $\pm(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ であり、中間主応力の方向 (σ_2 方向) を含み最大主応力の方向と最小主応力の方向を2等分する面に生ずる (図2.8)。

図2.3に示した応力成分の力学的意味からも、応力の各成分の値自体は用いている座標系と不可分なものであり、別の座標系を用いれば一般に成分の値は異なったものとなる。しかしながら、応力テンソルという座標系に無関係な量 (1点における内力の状態という力学的な量) を座標系の助けを借りて9個の成分で表現しているのであるから、異なる座標系に関する応力の成分の間には応力成分の変換則と呼ばれる一定の関係が存在する。これは、たとえば式(2.3)あるいは式(2.8)から求めることができる。

【例題 2.1】 x 軸方向を主応力 σ_3 方向とする二つの直角座標系 $Oxyz$ 、 $Ox'y'z'$ に関する応力成分の変換則を式(2.8)を用いて示せ。ただし x 軸と x' 軸のなす角を θ とする。

【解】 $Ox'y'z'$ 系に関する成分に ' を付すことにする。図2.3に示された応力成分の意味から、 $\sigma_x = \sigma_x' = \sigma_3$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{yz}' = \tau_{yz}' = 0$ である。図2.9に示すように、式(2.8)で n を x' 軸方向の単位ベクトル $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ にとれば $\sigma^{(n)} = \sigma_x'$ 、 $(\tau^{(n)})^2 = \tau_{xy}^2$ であるから

$$\begin{aligned} \sigma_x' &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{xy}^2 &= (\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta)^2 + (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta)^2 - \sigma_x'^2 \\ &= \left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \right]^2 \end{aligned} \quad (2.10a)$$

となる。 $\theta=0$ では $\tau_{xy}' = \tau_{xy}$ であるから

$$\tau_{xy}' = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2.10b)$$

となる。

σ_y' は、(2.10a) で θ の代わりに $\theta + \pi/2$ として

$$\sigma_y' = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2.10c)$$

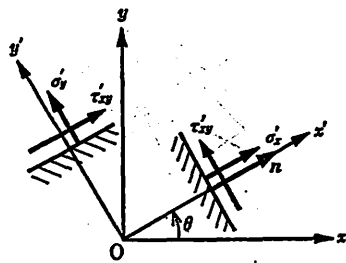


図 2.9 座標軸の回転

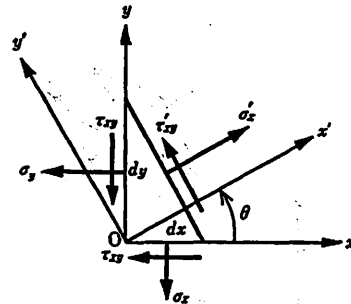


図 2.10 異なる座標系での応力成分の関係

である。この場合の式 (2.10) は、図 2.10 の三角形部分に作用する力のつり合いにもとって考える方が簡単に求まる。

応力成分の値自体は座標系により一般に異なるのでスカラー量ではない。しかしながら、応力テンソルに固有であって座標系には依存しない一つの値で決まるといふスカラー量も存在する。先に述べた主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は応力状態によって定まる値をとり座標系には依存しないから、それぞれがそのようなスカラー量である。普通は、これから作られる三つのスカラー量

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 + \sigma_1\sigma_3, \quad J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (2.11a)$$

をそれぞれ応力の 1 次、2 次、3 次の不変量 (invariants) という。これらを一般の座標系に関する成分で表すには、たとえば式 (2.8) を用いればよい。特に J_1 は、

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.11b)$$

である。これが不変量であることから

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{J_1}{3} \quad (2.12)$$

は、1 点においてあらゆる面を考えた場合、それらの面に作用する垂直応力の平均値であり、その点における平均的な等方応力 (負の静水圧応力) を与える。この σ_m を平均応力 (mean stress) という。また、この σ_m を用いて式 (2.4) の応力テンソルを

$$\begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

と分解すると、最初のものは、どの面にも垂直応力 σ_m しか作用していないという平均的な等方応力作用を表し、後のものはせん断的な応力作用を表す。後者は偏差応力テンソル (deviatoric stress tensor) と呼ばれ、塑性変形を考える際に特に重要となる。

[2] ひずみ 物体のどの部分を考えても、応力が零の状態と応力が生じている状態とでは、その寸法形状が変化している。すなわち、変形した状態にある。物体内の点

P における変形の状態とは、いいかえれば、点 P を含む微小部分内の各点が点 P に相対的にどのように変位しているかということである。そこで、図 2.11 のように物体内で微小距離離れた 2 点 P, Q をとり、位置ベクトルをそれぞれ $r, r+dr$ とする。外力の作用によって P, Q がそれぞれ $u, u+du$ だけ変位したとする。du が P 点に対する Q 点の相対変位である。直角座標系 $Oxyz$ での r, dr, u, du の成分をそれぞれ $(x, y, z), (dx, dy, dz), (u_x, u_y, u_z), (du_x, du_y, du_z)$ とすると

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (2.14a)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (2.14b)$$

である。したがって、P 点近傍の任意の点の相対変位は、変位成分の P 点での偏微分係数の

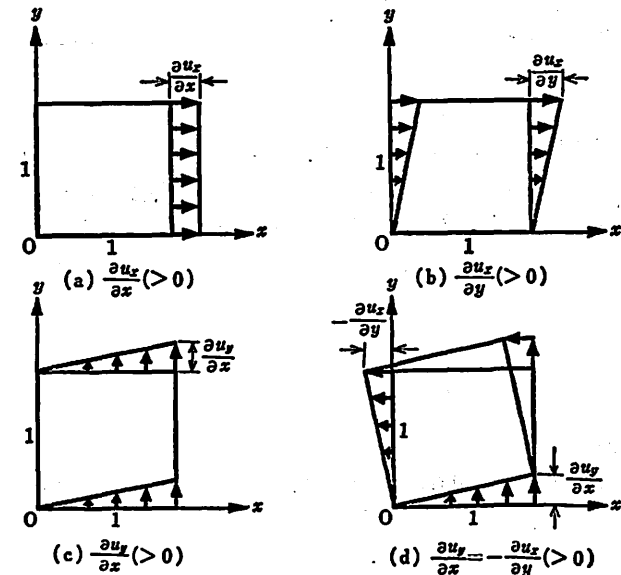


図 2.12 変位のこう配

組で完全に定められる。すなわち、P点での変形の状態とは、これら9個の偏微分係数を成分とする一つの量であるといえる。これらの成分のもつ幾何学的意味を図2・12に示す。

さて図2・12(d)は、相対変位 du の中には、P点近傍の寸法形状の変化を伴わない回転も含まれていることを示している。このような近傍部分全体の回転によってP点に応力が生ずることはない。これまで広い意味で変形といい表してきたものから、回転を取り除いて真に長さ・角度の変化を表す量を考えなければならない。その際、変位成分の偏微分係数 $(u_x/\partial x, \partial u_x/\partial y, \dots)$ は微小量であり、これらの2次以上の項は無視できると仮定する。これは簡単に微小変形 (infinitesimal deformation) の仮定といわれるもので、特に断らない限り以後の取扱いの前提条件である。この仮定により、P点近傍の回転も微小角の回転としてよく、よく知られているようにベクトル ω で表すことができる。 $|\omega|$ が微小回転角の大きさを、 ω の方向が回転軸方向である。図2・13に示すようにP点から dr 離れた点Qは、この回転によりP点に相対的に

$$du = \omega \times dr \quad (2 \cdot 15 a)$$

だけ変位する。 ω の成分を $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ とすると

$$\begin{pmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 15 b)$$

である。このように微小回転は、3行3列の反対称な行列で表すこともできる。そこで一般の場合に、たとえば

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

のような分解を考え

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), & \gamma_{zx} &= \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 16 a)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{yz} &= -\omega_{zy} = -\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \omega_{zx} &= -\omega_{xz} = -\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \omega_{xy} &= -\omega_{yx} = -\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 16 b)$$

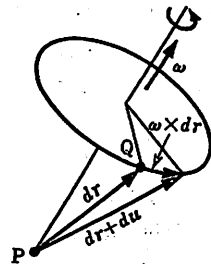


図2・13 微小回転による相対変位

と表すことにすると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 17)$$

である。式(2・17)の右辺第2項の行列は反対称であって回転を表し、回転テンソル (rotation tensor) と呼ばれる。したがって第1項の対称行列が長さ・角度の変化を表している一つの量でひずみテンソル (strain tensor) と呼ばれる。9個の要素 $\epsilon_x, \gamma_{xy}, \dots$ が xyz 系でのひずみの成分であり、定義により対称である ($\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$)。図2・12(a)に示すように $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の線要素の単位長さ当たりの伸びを表すのでこれらを縦ひずみ (longitudinal strain) 成分と呼ぶ。また $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ は、図2・14に示すように互いに直交する座標軸方向の2線要素間の角度の減少量の半分であり、せん断ひずみ (shearing strain) 成分と呼ばれる。

ひずみテンソルと応力テンソルは数学的には同じ性格のものである。したがって主ひずみ、最大せん断ひずみ、ひずみの不変量、偏差ひずみなどは、応力の場合に対応させることができる。特にひずみの1次の不変量

$$I_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (2 \cdot 18)$$

は、体積の変化割合を表すので体積ひずみ (volumetric strain) あるいは体積膨脹 (cubic dilatation) と呼ばれる。

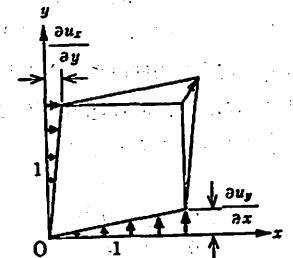


図2・14 せん断ひずみの成分 $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) (>0)$

2・2 Hooke の法則^(*)

前節2・1では、互いに関係している力学的な量である応力と幾何学的な量であるひずみを考えた。この両者の関係は物質によって異なるが、ひずみが小さい範囲では線形の関係になることが広く認められている。したがって普通の物体は、ある程度までの外力に対してはこれに比例した変形を生じ、外力を取り去ればもとの形に戻るといふ線形弾性体 (linear elastic body) である。これ以後物体は均質かつ等方性の線形弾性体とする。ここで、均質とは物体が同一材料からできていることを意味し、等方性とはその材料の性質が方向によらず同じであることを意味する。したがって、たとえばこのような物体から切り出された引張試験片はこれらがどの方向に切り出されたかによらず全く同じ応力-ひずみ関係に従うわけ

である。実用材料の多くは、近似的に均質等方であるとしてよい。

そうすると、 x 軸方向の垂直応力 σ_x のみが作用すれば、よく知られているように

$$\sigma_x = E\epsilon_x, \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x \left(= -\frac{\nu}{E}\sigma_x \right), \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0 \quad (2 \cdot 19 a)$$

なる比例関係が成り立つ。ここで E はヤング率 (Young's modulus), ν はポアソン比 (Poisson ratio) で、材料 (物質) により異なる定数である。式 (2・19 a) は単軸応力状態での応力-ひずみ関係であり、 $\sigma_x = \sigma_1$, $\epsilon_x = \epsilon_1$, $\epsilon_y = \epsilon_2$, $\epsilon_z = \epsilon_3$ としてまとめて表すと

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E} \sigma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 19 b)$$

である。前節 2・1 の (1) で述べたように、一般の応力状態も主応力方向を座標軸にとれば

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 20)$$

のように 3 種の単軸応力状態を重ね合わせて実現できる。この右辺第 1 項の単軸応力状態のひずみは式 (2・19 b) で与えられる。等方性体であるから第 2 項、第 3 項の単軸応力状態のひずみも応力の方向にさえ注意すれば同様の関係で与えられる。応力とひずみの関係が線形であるから、一般的な応力状態 (2・20) のひずみはこれら 3 種の単軸応力状態のひずみの和で与えられる。したがって

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 21 a)$$

である。式 (2・21 a) は、一般の場合の応力-ひずみ関係を主応力座標系での成分を用いて表したものである。

これを一般の座標系での成分を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 21 b)$$

となる。この関係は応力について解いた形に表すこともできる。式 (2・21 b) の対角要素の和をとれば

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2 \cdot 22)$$

となる。たとえば、第 2 項の単軸応力状態のひずみは、式 (2・19 b) の右辺で σ_1 を σ_x に換え、1 行 1 列と 2 行 2 列の要素を入れ換えたものとなる。これを式 (2・21 b) 右辺第 2 項に用い、両辺に $E/(1+\nu)$ をかけることにより

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 21 c)$$

をうる。式 (2・21 a ~ c) は、もちろん同一の応力-ひずみ関係を表しているが、この関係を Hooke の法則 (Hooke's law) という。特に、ひずみの成分が $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ 以外すべて零であれば、零でない応力成分は $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \gamma_{xy} E / (1+\nu)$ のみとなる。これを

$$\tau_{xy} = 2G\gamma_{xy} \quad (2 \cdot 23)$$

と表したとき、 G を剛性率 (modulus of rigidity) という。したがって

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2 \cdot 24)$$

である。微小変形を仮定し、Hooke の法則 (2・21) を用いて応力、ひずみ、変位を取り扱うのが線形弾性論であり、以後の解析もこれによるものである。

2・3 平面ひずみと平面応力⁽⁴⁾

弾性論に基づいて具体的に応力場を求めることは、一般的な問題に対しては必ずしも容易ではない。しかし、物体がこの節で説明する平面ひずみ、平面応力の状態にある場合には、応力場を求める問題は 2 次元問題となり取扱いが幾分簡単になる。また、これらの状態は、柱状物体や板状物体において生ずるので、実際的にも重要なものである。き裂を含む物体の問題もこのような 2 次元的な場合が基本的である。

〔1〕平面ひずみ 物体は非常に長い柱状物体とし、図 2・15 に示すようにその軸方向に一様でしかも軸方向の成分を持たない外力が作用しているとする。物体の両端付近の部分は端の影響を強く受けるが、両端から十分離れた部分はこの影響をほとんど受けない。これと外力の状況とを考えあわせれば、物体の両端付近を除いて、軸に垂直などの断面においても変位の様子は同じで、特に軸方向の変位は零であるとしてよい。すなわち、軸に垂直な一断面を xy 平面にとって変位を表すと

$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = 0 \quad (2 \cdot 25)$$

である。このときには式 (2・16 a) により零でないひずみ成

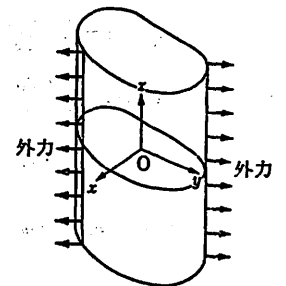


図 2・15 平面ひずみ

分が, xy 平面内の成分

$$\epsilon_x(x, y), \epsilon_y(x, y), \gamma_{xy}(x, y)$$

のみとなり, しかも平面内の位置だけに関係する。変位が式 (2・25) で表される場合を平面ひずみ (plane strain) の状態という。Hooke の法則 (2・21 c) 式により応力とひずみの関係は

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y \end{pmatrix} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 26)$$

$$\sigma_x = \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$$

となる。ただし, ヤング率 E の代わりに剛性率 G を用いてある [式 (2・24)]。応力ももちろん x, y のみに関係するから, 応力のつり合い式 (2・5 b) は

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0 \quad (2 \cdot 27)$$

となる。

〔2〕平面応力 物体が板状であれば, 板表面の影響は内部のすべての点におよぶことになる。そこで図 2・16 に示すように, 厚さ h の平板がその側面に板面に平行な外力を受けている場合を考える。板の中央平面を xy 平面にとり板に垂直に z 軸をとると, 板両面 $z = \pm h/2$ 上で $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$ である。きわめて薄い板では, 両表面で零である $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zy}$ は板内部でも零と考えることができる。そうすると応力成分はどの点においても xy 平面に平行な $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ のみとなる。このように, 一平面に平行な応力成分のみが作用している場合を平面応力 (plane stress) の状態といい, 一般には $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ が z にも関係する。したがって, 厳密には, 面内応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を求める問題が x, y, z に関係し, 普通の 2 次元問題にはならない。ただし, きわめて薄い板であれば, 平面応力を仮定し, かつ応力の板厚方向の変化を無視して近似的に 2 次元問題として取り扱ってもさしつかえない。

上では, 板厚がきわめて薄いということで, 板表面で零である $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zy}$ は板内部でも零であると考えた。実際上重要なのは板厚が比較的薄いという場合であるが, このときにも σ_z は板内部で零とみなすことができる。なぜなら, $F_z = 0$ として応力のつり合い式 (2・5 b) の第 3 式を板表面で考えれば $[\partial \sigma_z / \partial z]_{z=\pm h/2} = 0$ であり, σ_z は板表面上で値が零のみならず板厚方向の変化率も零となっているからである。このようにいたる所で $\sigma_z = 0$ で, $z = \pm h/2$ 面上で $\tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$ である場合を広義の平面応力 (generalized plane stress) の状態という。比較的薄い板であれば, 応力成分の板厚方向の変化が小さいので, 応力成分の板厚にわたる平

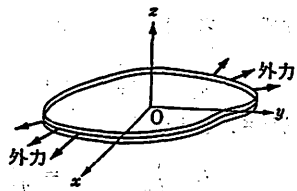


図 2・16 平面応力

均値は実際上有用なものとなる。そこで, 薄い板が広義の平面応力状態にある場合に応力, 変位の板厚平均を求めることを考えよう。板厚平均を $-$ で表すことにすると, たとえば

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_x(x, y) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(x, y, z) dz$$

であり, $\sigma_z = 0$ である。応力のつり合い式 (2・5 b) の第 1, 2 式について板厚平均をとり, $z = \pm h/2$ で $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ を用いれば

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \bar{F}_x = 0, \quad \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \bar{F}_y = 0 \quad (2 \cdot 28)$$

をうる。また, 第 3 式で $F_z = 0$ として板厚平均をとり, $\sigma_z = 0$ を用いれば

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (2 \cdot 29)$$

をうる。 $\sigma_z = 0$ であるから Hooke の法則 (2・21 c) 式より

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (2 \cdot 30 a)$$

である。これを式 (2・21 c) へ代入すると面内の応力成分とひずみ成分の関係は

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y \end{pmatrix} + \frac{2G\nu}{1-\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 31 a)$$

となる。式 (2・30 a), (2・31 a) が平面応力の場合にもあてはまることは明らかである。

これらの関係は板厚平均に対してもそのまま成り立ち

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\sigma}_y \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_x & \bar{\gamma}_{xy} \\ \bar{\gamma}_{yx} & \bar{\epsilon}_y \end{pmatrix} + \frac{2G\nu}{1-\nu} (\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 31 b)$$

$$\bar{\epsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\bar{\epsilon}_x + \bar{\epsilon}_y) \quad (2 \cdot 30 b)$$

である。また, 式 (2・16 a) のうち, 面内のひずみ成分と変位成分の関係も, 板厚平均に対してそのまま成り立つ。すなわち

$$\bar{\epsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}, \quad \bar{\epsilon}_y = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} \right) \quad (2 \cdot 32)$$

である。式 (2・28), (2・31 b), (2・32) を用いて x, y のみに関係する $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}, \bar{u}_x, \bar{u}_y$ を求めるのが広義の平面応力問題である。2 次元問題での平面応力問題は, 広義の平面応力問題にあたる。以後平面応力は広義の平面応力をさすものとし, 板厚平均を表す $-$ も省略する。

〔3〕平面問題 平面ひずみ問題と平面応力問題を比較すると, 応力のつり合い式 (2・27) と (2・28), 変位とひずみの関係式 (2・16 a) と (2・32) は全く同じである。また, 平面応力の応力-ひずみ関係 (2・31 b) はポアソン比 ν を形式的に

$$\nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (2 \cdot 33)$$

と置き換えれば、平面ひずみの応力-ひずみ関係 (2・26) に一致する。このように、平面ひずみと平面応力で、問題を解くために用いる関係は定数の単なる置き換えですべて同じ形となる。したがって、これら2種の問題は数学的には全く同等であり、平面問題 (2次元問題) といわれる。たとえば、平面応力問題の解で弾性定数として G, ν が使われてあれば、 ν を (2・33) の ν' で置き換えるだけで対応する平面ひずみの解が得られる。

2・4 ひずみの適合条件⁽⁴⁻⁶⁾

変位の成分が与えられた場合には、これからひずみの成分を求めることができ、Hookeの法則を用いれば応力の成分も求めることができる。逆に、ひずみあるいは応力が与えられた場合に、これに対応する変位が弾性連続体として可能な変位、すなわち、一価連続な変位であるかどうかは問題である。応力あるいはひずみに対して実際に可能な変位が常に存在していることを保証する条件がひずみの適合条件 (compatibility conditions of strain) である。平面問題は応力に着目して解く方法が便利であり、この条件が特に重要な役割を果たす。ここでは、平面問題の場合だけを考える。

平面内の変位成分 u_x, u_y が与えられたとするとひずみの成分は

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2 \cdot 34)$$

である。したがって、ひずみ成分の間には

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2 \cdot 35)$$

なる関係が存在する。逆に、式 (2・35) を満たしているひずみ成分 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ が与えられたとする。式 (2・35) は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \right)$$

と表されるが、これは

$$\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

したがって

$$\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (f + \gamma_{xy}), \quad \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{xy} - f)$$

であるような連続関数 $f(x, y)$ が、定数を除いてただ一つ存在することを保障している。すなわち、 α を任意定数として $f(x, y) = f_0(x, y) + \alpha$ と表される連続関数が存在する。そうすると、上の後の2式がまた

$$\epsilon_y = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad f + \gamma_{xy} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} - f = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \epsilon_x = \frac{\partial g}{\partial x}$$

したがって

$$\epsilon_x = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) \quad (2 \cdot 36)$$

を満たす連続関数 $g(x, y), h(x, y)$ が、定数を除いてただ一つ存在することを保障している。ただし、これは $f(x, y)$ 中の α を一つの値に固定した場合にいえることであり、 α が不定の場合には、 $g(x, y), h(x, y)$ は定数のみでなく、それぞれ $\alpha x, -\alpha y$ を除いて一意的に定まることになる。それゆえ β, γ を任意定数として

$$g(x, y) = g_0(x, y) + \alpha x + \gamma, \quad h(x, y) = h_0(x, y) - \alpha y + \beta$$

と表せる一価連続関数が存在する。式 (2・36) は、 $g(x, y), h(x, y)$ がひずみ成分 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ に対応する変位成分 u_x, u_y であることを表している。また、 $f(x, y)$ は回転の成分 ω_z にあたっている。それゆえ、ひずみ成分 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ が式 (2・35) を満たしていれば一価連続な変位成分 u_x, u_y が存在し、これらは物体の並進と剛体回転を除いて一意的に定まることになる。式 (2・35) が平面問題でのひずみの適合条件である。

2・5 Airy の応力関数⁽⁴⁻⁶⁾

平面問題で体積力が零の場合、応力のつり合い式は

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2 \cdot 37)$$

である。これらは

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial (-\tau_{xy})}{\partial y}, \quad \frac{\partial (-\tau_{yx})}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$$

であるから

$$\sigma_x = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial g}{\partial x}$$

なる関数 $f(x, y), g(x, y)$ の存在を意味している。これらの f, g を $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ にかわる未知関数と考えれば、応力のつり合い式 (2・37) 自体は恒等的に満たされ、そのかわり

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} (= \tau_{xy})$$

が満たされなければならない。この式は

$$f = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad g = \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

なる関数 $\chi(x, y)$ の存在を意味しているから、 χ を f, g にかわる未知関数と考えれば、応力は

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \quad (2 \cdot 38)$$

与えられ、応力のつり合い式は恒等的に満たされることになる。この関数 $\chi(x, y)$ を Airy の応力関数 (Airy's stress function) という。 $\chi(x, y)$ をどのように選んでも、式 (2・38) で与えられる応力は応力のつり合い式 (2・37) の解にはなっている。しかし、この応力が弾性連続体として無理でない変位 $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ によって生ずるものであるためには、ひずみの適合条件式 (2・35)

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

が満たされなければならない。この式のひずみ成分を Hooke の法則を用いて応力成分で表し式 (2・38) を代入すれば、応力関数 χ の満たすべき方程式として

$$\nabla^4 \chi = 0 \quad (2 \cdot 39)$$

ただし

$$\nabla^4 = (\nabla^2)^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

をうる。 $\nabla^2 f$, $\nabla^2 g = 0$ を満たす関数 f, g をそれぞれ調和関数 (harmonic function), 重調和関数 (biharmonic function) というので、Airy の応力関数 χ は重調和関数でなければならない。式 (2・38), (2・39) には材料を特徴づける弾性定数が含まれていない。したがって、特に応力だけでかたづく問題、すなわち物体の境界条件が表面力で指定されている問題では、面内応力の分布が材料によらず同じになる。

次に、応力関数 χ と変位成分 u_x, u_y の関係を求めておく。平面応力の場合には、式 (2・31b), (2・32), (2・38) を用いると

$$2G \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{1}{1+\nu} \nabla^2 \chi, \quad 2G \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{1}{1+\nu} \nabla^2 \chi \quad (2 \cdot 40)$$

$$G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$$

をうる。 $\nabla^4 \chi = \nabla^2 (\nabla^2 \chi) = 0$ であるから $\nabla^2 \chi$ は調和関数である。いま、 $\phi(x, y)$ を調和関数とすれば $\partial^2 \phi / \partial x \partial y$ も調和関数であるから

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \chi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2 \cdot 41)$$

を満たす ϕ を求めることができる。これを式 (2・40) の第1, 2式に用いて積分すれば

$$2Gu_x = -\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \phi}{\partial y} + p(y), \quad 2Gu_y = -\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} + q(x) \quad (2 \cdot 42)$$

をうる。ここで $p(y)$, $q(x)$ はそれぞれ y, x のみの任意関数である。式 (2・42) を式 (2・40) の第3式へ代入し $\nabla^2 \phi = 0$ に注意すると

$$p'(y) = -q'(x)$$

をうる。したがって、 α, β を任意定数とすると

$$p(y) = -\alpha y + \beta, \quad q(x) = \alpha x + \gamma$$

である。これらを式 (2・42) に用いて

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= -\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \alpha y + \beta, & 2Gu_y &= -\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \alpha x + \gamma \\ \nabla^2 \chi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, & \nabla^2 \phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 43)$$

をうる。 $(-\alpha y, \alpha x)/2G$ は剛体回転変位を、 $(\beta, \gamma)/2G$ は並進変位を表すので応力には関係しない。

2・6 複素関数による平面問題の取扱い⁽⁶⁻²⁾

[1] 複素応力関数 2・5節で説明した Airy の応力関数 $\chi(x, y)$ は、複素変数

$$z = x + iy \quad (i = \sqrt{-1})$$

の関数を用いると、一般形を表示することができる。複素数の実部、虚部を表すのに記号 Re , Im を使い、共役複素数を表すのに記号 $\bar{}$ を用いると

$$\text{Re}(z) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \text{Im}(z) = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad (2 \cdot 44)$$

である。 $z, \bar{z}$ を独立な変数と考えることにすると、式 (2・44) は x, y から $z, \bar{z}$ への独立変数の変換を表しており

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 45)$$

となる。したがって

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = 16 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \quad (2 \cdot 46)$$

をうる。 $z, \bar{z}$ を独立変数と考えた Airy の応力関数も $\chi(z, \bar{z})$ と表すことにすると、式 (2・39) より

$$\nabla^4 \chi = 16 \frac{\partial^4 \chi(z, \bar{z})}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \quad (2 \cdot 47)$$

である。式 (2・47) を $\bar{z}$ で2回積分すると $a(z)$, $b(z)$ を z の任意関数として

$$\frac{\partial^2 \chi(z, \bar{z})}{\partial z^2} = \bar{z}a(z) + b(z)$$

となる。これを z で2回積分し

$$f_1(z) = \int \int a(z'') dz' dz', \quad f_2(z) = \int \int b(z'') dz' dz'$$

とおけば

$$\chi(z, \bar{z}) = \bar{z}f_1(z) + zf_2(\bar{z}) + f_3(z) + f_4(\bar{z}) \quad (2 \cdot 48)$$

である。

ここで、 $f_1(z)$, $f_2(z)$ は z のみの関数、 $f_3(\bar{z})$, $f_4(\bar{z})$ は $\bar{z}$ のみの関数で、 $\chi(z, \bar{z})$ に実数値をとらせるものであれば任意であってよい。この条件 $\chi(z, \bar{z}) = \overline{\chi(z, \bar{z})}$ を考えると

$$\bar{z}f_1(z) + zf_2(\bar{z}) + f_3(z) + f_4(\bar{z}) = \overline{\bar{z}f_1(z) + zf_2(\bar{z}) + f_3(z) + f_4(\bar{z})}$$

または

$$\bar{z}[f_1(z) - \overline{f_1(z)}] - z[\overline{f_1(z)} - f_1(z)] + [f_3(z) - \overline{f_3(z)}] - [\overline{f_3(z)} - f_3(z)] = 0$$

となる ($f_2(z) = \overline{f_2(z)}$, $\overline{f_2(z)} = f_2(z)$ など注意)。したがって

$$f_1(z) = \overline{f_1(z)}, \quad f_3(z) = \overline{f_3(z)}$$

としておけばよい。これから

$$f_2(\bar{z}) = \overline{f_2(z)} = \overline{f_1(z)}, \quad f_4(\bar{z}) = \overline{f_4(z)} = \overline{f_3(z)}$$

となり、式 (2・48) は

$$\chi(z, \bar{z}) = \bar{z}f_1(z) + z\overline{f_1(z)} + f_3(z) + \overline{f_3(z)} = 2\text{Re}[\bar{z}f_1(z) + f_3(z)]$$

と表せる。 $f_1(z)$, $f_3(z)$ は z のみの任意関数であり、あらためて $2f_1(z) = \varphi(z)$, $2f_3(z) = \phi(z)$ と表せば

$$\begin{aligned} \chi(z, \bar{z}) &= \text{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \phi(z)] \\ &= \frac{1}{2}[\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \phi(z) + \overline{\phi(z)}] \end{aligned} \quad (2 \cdot 49)$$

である。これは重調和関数 χ を任意の二つの複素関数 $\varphi(z)$, $\phi(z)$ で一般的に示したもので、Goursat の公式といわれる。ここでは、これら $\varphi(z)$, $\phi(z)$ を Goursat の (複素) 応力関数と呼ぶことにする。ただし、 $\varphi(z)$, $\phi(z)$ は正確には任意の解析関数といわなければならない。すなわち、これらは考えている領域で微分可能なものでなければならない。これは、上で式 (2・49) を導いた際には最初から z と $\bar{z}$ を独立な変数と考え、 $\chi(z, \bar{z})$ がこれらで微分可能と考えていることによる。したがって $\varphi(z)$, $\phi(z)$ の実部、虚部は微分可能であるための条件 (Cauchy-Riemann の微分方程式)

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{Re}[\varphi(z)] = \frac{\partial}{\partial y} \text{Im}[\varphi(z)], \quad \frac{\partial}{\partial y} \text{Re}[\varphi(z)] = -\frac{\partial}{\partial x} \text{Im}[\varphi(z)] \quad (2 \cdot 50)$$

を満たし、それゆえ調和関数

$$\nabla^2 \text{Re}[\varphi(z)] = \nabla^2 \text{Im}[\varphi(z)] = 0$$

(2・51)

である ($\phi(z)$ についても同じ)。

〔2〕 応力・変位の複素関数表示 応力と応力関数 χ の関係 (2・38) を z , $\bar{z}$ で表せば

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right)\chi$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right)\chi$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = -i\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right)\chi$$

である。これから

$$\sigma_z + \sigma_y = 4\frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial \bar{z}} (= \nabla^2 \chi), \quad \sigma_y - \sigma_z + 2i\tau_{xy} = 4\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}$$

となり、式 (2・49) を用いれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z + \sigma_y &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\text{Re}[\varphi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_z + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \phi''(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 52 a)$$

ただし

$$\varphi'(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}, \quad \varphi''(z) = \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}$$

各成分について書くと

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \text{Re}[2\varphi'(z) - \bar{z}\varphi''(z) - \phi''(z)] \\ \sigma_y &= \text{Re}[2\varphi'(z) + \bar{z}\varphi''(z) + \phi''(z)] \\ \tau_{xy} &= \text{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \phi''(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 52 b)$$

である。

次に、平面応力の場合の変位と応力関数 χ の関係式 (2・43) は

$$2Gu_x = -\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{i}{1+\nu}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}\right) - \frac{\alpha}{2i}(z - \bar{z}) + \beta$$

$$2Gu_y = -i\left(\frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{\alpha}{2}(z + \bar{z}) + \gamma$$

$$4\frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial \bar{z}} = i\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2}\right), \quad 4\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

と表せる。第 1, 2 式より

$$2G(u_x + iu_y) = -2\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} + \frac{2i}{1+\nu}\frac{\partial \phi}{\partial z} + i\alpha z + \beta + i\gamma \quad (2 \cdot 53)$$

となる。また、第 4 式および ϕ が実であることから $\phi = p_1(z) + \overline{p_1(z)}$ である。これと式 (2・49) を第 3 式に用いると $\partial \phi / \partial z = p_1' = -2i\varphi(z) + c$ である。したがって、式 (2・53) は

$$2G(u_x + iu_y) = \frac{3-\nu}{1+\nu}\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\phi'(z)} + i\alpha z + \delta \quad (2 \cdot 54)$$

となる (α は実数, $\delta = \beta + i[2c/(1+\nu) + \gamma]$). 式(2.33)により, 上式の ν を $\nu/(1-\nu)$ と置き換えれば平面ひずみの場合の変位となる. 平面応力, 平面ひずみの場合をまとめると

$$2G(u_x + iu_y) = \kappa \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi'(z)} \quad (2.55)$$

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (2.56)$$

である. ただし, 式(2.54)の右辺最後の剛体変位の項は $\varphi(z)$ に含めてある. このようにしても式(2.52)の応力にはなんら影響しない.

[3] 応力関数の例

(1) 一様応力場 すべての点で応力成分が一定値 $\sigma_x = \sigma_x^0$, $\sigma_y = \sigma_y^0$, $\tau_{xy} = \tau^0$ をとる場合は

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}(\sigma_x^0 + \sigma_y^0)z, \quad \psi'(z) = \left[\frac{1}{2}(\sigma_y^0 - \sigma_x^0) + i\tau^0 \right]z \quad (2.57)$$

である. これは式(2.57)を式(2.52b)に代入すれば容易に確かめられる.

(2) 集中力による応力場 図2.17に示すように, 原点Oに集中力 (Q, P) が作用しているとする. 応力関数は

$$\varphi(z) = -\frac{Q+iP}{2\pi(\kappa+1)} \log z, \quad \psi(z) = -\frac{\kappa(Q-iP)}{2\pi(\kappa+1)} z \log z \quad (2.58)$$

で与えられる. これは次のように確かめられる.

一般に, 法線ベクトル $n = (n_x, n_y)$ 面に作用する応力ベクトルの x, y 成分は式(2.3b), (2.38)より

$$\begin{aligned} T_x^{(n)} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} n_x - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} n_y = \left(-n_y \frac{\partial}{\partial x} + n_x \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ T_y^{(n)} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} n_x + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} n_y = -\left(-n_y \frac{\partial}{\partial x} + n_x \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.59a)$$

である. 図2.18からわかるように n に垂直方向の単位ベクトルの成分は $(-n_y, n_x)$ で

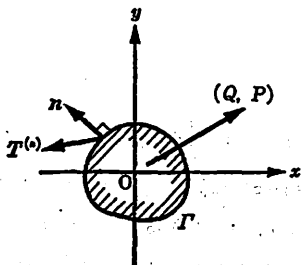


図2.17 原点に作用する集中力

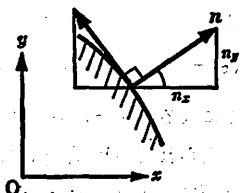


図2.18 法線ベクトルと接線ベクトル

ある. したがって, この方向に距離 s をとれば, 偏微分 $\partial/\partial s$ は

$$\frac{\partial}{\partial s} = -n_y \frac{\partial}{\partial x} + n_x \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.60)$$

であり, 式(2.59a)は

$$T_x^{(n)} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right), \quad T_y^{(n)} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \quad (2.59b)$$

となる. 今原点Oを囲む閉曲線 Γ の外側が内側におよぼす合力を $P = (P_x, P_y)$ とする. Γ 上の任意点Aから Γ に沿って反時計まわりに距離 s をはかることにすると, 法線が n なる点で単位長さ部分に作用する力が式(2.59b)で与えられるから

$$\begin{aligned} P_x &= \oint T_x^{(n)} ds = \oint \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) ds = \left[\frac{\partial \chi}{\partial y} \right]_A \\ P_y &= \oint T_y^{(n)} ds = -\oint \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) ds = -\left[\frac{\partial \chi}{\partial x} \right]_A \end{aligned} \quad (2.61a)$$

である. ただし, $\oint () ds$ は Γ を反時計まわりに1周する積分で, $[]_A$ は1周した後の値の差である. 式(2.61a)から $P_y + iP_x$ をつくり式(2.45), (2.49)を用いれば

$$P_y + iP_x = -2 \left[\frac{\partial \chi(z, \bar{z})}{\partial z} \right]_A = -[\bar{z}\psi'(z) + \varphi(z) + \psi'(z)]_A \quad (2.61b)$$

となる. 式(2.58)を上式に代入すると

$$P_y + iP_x = \frac{-1}{2\pi(\kappa+1)} \left[-(Q+iP) \frac{\bar{z}}{z} - (Q-iP) \log \bar{z} + \kappa(Q-iP)(\log z + 1) \right]_A$$

である. Γ を1周するはじめにおいてA点が $z = r_A \exp(i\theta_A)$ で表されるとすると, 1周後には $z = r_A \exp[i(\theta_A + 2\pi)]$ である. したがって

$$\left[\frac{\bar{z}}{z} \right]_A = 0, \quad [\log \bar{z}]_A = -2\pi i, \quad [\log z]_A = 2\pi i$$

であり, これらを上式に代入して $P_y + iP_x = -(P + iQ)$, すなわち $P_x + Q = 0$, $P_y + P = 0$ をうる. これは, Γ で囲まれた部分に (Q, P) なる外力が作用していることを意味している. Γ は原点Oを囲みさえすれば任意でよいから, 結局原点Oに集中力 (Q, P) が作用していることになる.

(3) 集中モーメントによる応力場 図2.17で原点に反時計まわりの集中モーメント M が作用している場合の応力関数は

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = \frac{iM}{2\pi} \log z \quad (2.62)$$

で与えられる. これを上と同様な方法で確かめてみる. 法線方向が n なる面に作用する応力ベクトルが式(2.59b)であるから, この原点Oに関する反時計回りのモーメントは

$$-y T_x^{(n)} + x T_y^{(n)} = -\left[y \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + x \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \right]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s} \left(x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s} \left(x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \chi}{\partial s}$$

である。したがって、原点 O を囲む閉曲線 Γ の外側が内側におよぼす力は点 O に関して合モーメント

$$M_0 = \oint \frac{\partial}{\partial s} \left[- \left(x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + \chi \right] ds = \left[- \left(x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + \chi \right]_A^A$$

(2・63a)

をもつ。式 (2・44), (2・45), (2・49) を用いると

$$M_0 = \left[- \left(z \frac{\partial \chi(z, \bar{z})}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial \chi(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) + \chi \right]_A^A = -2 \operatorname{Re} \left[z \frac{\partial \chi(z, \bar{z})}{\partial z} \right]_A^A + [\chi]_A^A$$

$$= \operatorname{Re} [-z \bar{z} \varphi'(z) + \phi(z) - z \phi'(z)]_A^A$$

(2・63b)

である。これに式 (2・62) を代入し

$$\left[\frac{1}{z} \right]_A^A = 0, \quad [\log z]_A^A = 2\pi i$$

を用いれば

$$M_0 + M = 0$$

をうる。閉曲線 Γ を原点 O に収縮させれば、原点に集中モーメント M が作用していることがわかる。

[4] x 軸上で $\tau_{xy}=0$ あるいは $\sigma_y=0$ となる応力関数^{9,10)} Goursat の応力関数 $\varphi(z)$, $\phi(z)$ の代わりに、これらとある関係で結ばれる二つの複素関数を用いて応力関数を表すこともできる。このような二つの関数のとり方として、それぞれの関数にある特徴をもった応力状態を対応させることが考えられる。このような特徴をもった応力状態として、たとえばそれぞれの複素関数に x 軸上で $\tau_{xy}=0$ あるいは $\sigma_y=0$ である状態を対応させると、

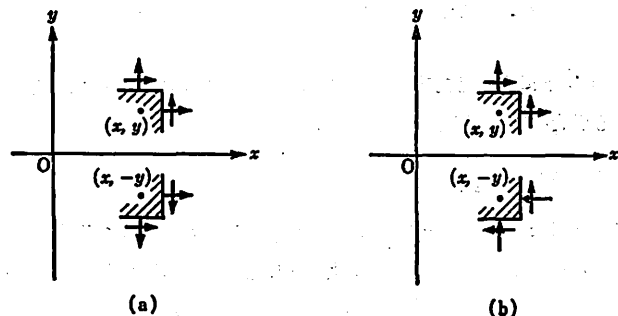


図 2-19 x 軸に関して (a) 対称な応力状態と (b) 反対称な応力状態

x 軸に関して対称な問題あるいは反対称 (逆対称) な問題を取り扱うのに都合がよい。ここで x 軸に関して対称な問題とは、応力状態が図 2・19(a) に示した対称性

$$\sigma_x(x, y) = \sigma_x(x, -y), \quad \sigma_y(x, y) = \sigma_y(x, -y), \quad \tau_{xy}(x, y) = -\tau_{xy}(x, -y)$$

をもつものである。 x 軸上では $\tau_{xy}(x, 0) = -\tau_{xy}(x, 0)$ であるから $\tau_{xy}=0$ となっている。

また、 x 軸に関して反対称な問題は図 2・19(b) に示す応力状態をとるもので

$$\sigma_x(x, y) = -\sigma_x(x, -y), \quad \sigma_y(x, y) = -\sigma_y(x, -y), \quad \tau_{xy}(x, y) = \tau_{xy}(x, -y)$$

である。この場合には $\sigma_x(x, 0) = -\sigma_x(x, 0)$, $\sigma_y(x, 0) = -\sigma_y(x, 0)$ となり、 x 軸上で $\sigma_x = \sigma_y = 0$ である。後に取り扱うき裂の問題では、2・7 [1] が対称問題、2・7 [2] が反対称問題にあたる。

そこでまず、 x 軸上で $\tau_{xy}=0$ あるいは $\sigma_y=0$ となる応力関数を考える。

(1) x 軸上で $\tau_{xy}=0$ となる応力関数 式 (2・52b) より、 x 軸上 $y=0$ で

$$\tau_{xy} = \operatorname{Im} [\bar{z} \varphi''(z) + \phi''(z)] = 0$$

である。これは、 $x \varphi''(x) + \phi''(x) = f_R(x)$ なる関数 f_R に含まれる定数がすべて実数であることを意味している。したがって、一般の z に対して

$$x \varphi''(x) + \phi''(x) = f_R(x), \quad f_R(x) = \bar{f}_R(x)$$

となり、これを積分することにより $\phi'(z)$ を

$$\phi'(z) = \varphi(z) - x \varphi'(x) + g_R(z), \quad g_R(z) = \bar{g}_R(z) \quad \left(= \int f_R(z) dz \right) \quad (2 \cdot 64)$$

と表すことができる。 $\phi'(z)$ が任意の $\varphi(z)$ と $g_R(z) = \bar{g}_R(z)$ である任意の $g_R(z)$ を用いて式 (2・64) の形に与えられていれば、 $\varphi(z)$, $\phi(z)$ は x 軸上で $\tau_{xy}=0$ となる応力関数である。

(2) x 軸上で $\sigma_y=0$ となる応力関数 式 (2・52b) より x 軸上で

$$\sigma_y = \operatorname{Re} [2\varphi'(z) + \bar{z} \varphi''(z) + \phi''(z)] = 0$$

である。この場合には $2\varphi'(x) + x \varphi''(x) + \phi''(x) = f_I(x)$ なる関数 f_I に含まれる定数がすべて純虚数であることになる。したがって、一般に

$$2\varphi'(z) + x \varphi''(z) + \phi''(z) = f_I(z), \quad f_I(z) = -\bar{f}_I(z)$$

となり、積分することにより $\phi'(z)$ が

$$\phi'(z) = -\varphi(z) - x \varphi'(x) + g_I(z), \quad g_I(z) = -\bar{g}_I(z) \quad \left(= \int f_I(z) dz \right) \quad (2 \cdot 65)$$

と表されることになる。 $\phi'(z)$ が任意の $\varphi(z)$ と $g_I(z) = -\bar{g}_I(z)$ に従う任意の $g_I(z)$ を用いて上の形に与えられていれば、 $\varphi(z)$, $\phi(z)$ は x 軸上で $\sigma_y=0$ となる応力関数である。

一般の応力状態は、 x 軸上で $\tau_{xy}=0$ なる応力状態と、 x 軸上で $\sigma_y=0$ なる応力状態の適当な組み合わせで表すことができる。それゆえ、一般の応力関数を上の (a), (b) のタイ

の応力関数の和で表すこともできる。すなわち、任意の $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ を用いて一般の場合の $\varphi(z)$, $\psi(z)$ を

$$\varphi(z) = \phi_1(z) + \phi_2(z), \quad \psi'(z) = [\phi_1(z) - z\phi_1'(z)] - [\phi_2(z) + z\phi_2'(z)] + g(z) \quad (2.66)$$

と表すことができる。ただし、 $g(z) = g_R(z) + g_I(z)$ であり、 $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ がそれぞれ上の(1), (2)の $\varphi(z)$ にあたる。式(2.66)で

$$\phi_1(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{2}g(z), \quad \phi_2(z) = \varphi_2(z) + \frac{1}{2}g(z)$$

と表せば

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \quad \psi'(z) = [\varphi_1(z) - z\varphi_1'(z)] - [\varphi_2(z) + z\varphi_2'(z)] \quad (2.67)$$

となり、 $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ はやはり任意のものでよい。このように、一般に $\varphi(z)$, $\psi(z)$ の代わりに、これらと式(2.67)で関係づけられる $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ を独立にとれる関数としてもよい。その場合には、 $\varphi_2(z) = 0$ ならば x 軸上で $\tau_{xy} = 0$, $\varphi_1(z) = 0$ ならば x 軸上で $\sigma_y = 0$ という対応がつくことになる。ただし、この逆は一般には成り立たない。これは、式(2.66)を式(2.67)と表したことによる。 x 軸上に存在するき裂の問題でよく使われる Westergaard の応力関数は、これら $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ と簡単な関係で結ばれたものにあたる。

[5] Westergaard の応力関数^{9,10)} x 軸に関して対称な問題では、 x 軸上で $\tau_{xy} = 0$ となるので式(2.64)の関数を用いることができるが、特に $g_R(z) = 0$ として扱うことのできるものも多い。そのような場合には、一つの関数 $\varphi(z)$ のみで応力場を表すことができ、 $\varphi(z)$ のかわりに Westergaard の応力関数¹¹⁾

$$\hat{Z}_1(z) = 2\varphi'(z) \quad (2.68a)$$

がよく用いられる。同様に、 x 軸に関して反対称な問題では、式(2.65)で $g_I(z) = 0$ として扱うことのできるものも多く、その場合にはやはり $\varphi(z)$ のみで応力場を表すことができ、Westergaard の応力関数

$$Z_1(z) = 2i\varphi'(z) \quad (2.68b)$$

がよく用いられる。

式(2.68)を少し拡張して、式(2.67)の $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ と

$$Z_1(z) = 2\varphi_1'(z), \quad Z_2(z) = 2i\varphi_2'(z) \quad (2.69)$$

なる関係で結ばれる関数 $Z_1(z)$, $Z_2(z)$ を定めれば、これらを一般的な応力関数として用いることができる。このときには、式(2.67)より

$$Z_1(z) = 2\varphi'(z) + z\varphi''(z) + \psi''(z), \quad Z_2(z) = -iz\varphi''(z) - i\psi''(z) \quad (2.70)$$

である。 $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ と同様に、 $Z_1(z) = 0$ ならば x 軸上で $\sigma_y = 0$, $Z_2(z) = 0$ ならば x 軸上で $\tau_{xy} = 0$ である。式(2.70)を式(2.52), (2.55)に用いれば、応力、変位は $Z_1(z)$, $Z_2(z)$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re}[Z_1(z)] - y \operatorname{Im}[Z_1'(z)] + 2 \operatorname{Im}[Z_2(z)] + y \operatorname{Re}[Z_2'(z)] \\ \sigma_y &= \operatorname{Re}[Z_1(z)] + y \operatorname{Im}[Z_1'(z)] - y \operatorname{Re}[Z_2'(z)] \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re}[Z_1'(z)] + \operatorname{Re}[Z_2(z)] - y \operatorname{Im}[Z_2'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re} \left[\int Z_1(z) dz \right] - y \operatorname{Im}[Z_1(z)] \\ &\quad + \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \left[\int Z_2(z) dz \right] + y \operatorname{Re}[Z_2(z)] \\ 2Gu_y &= \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \left[\int Z_1(z) dz \right] - y \operatorname{Re}[Z_1(z)] \\ &\quad - \frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re} \left[\int Z_2(z) dz \right] - y \operatorname{Im}[Z_2(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

と表すことができる。

$Z_1(z)$, $Z_2(z)$ と Westergaard の応力関数 $\hat{Z}_1(z)$, $\hat{Z}_2(z)$ との関係は

$$Z_1(z) = \hat{Z}_1(z) + g'(z), \quad Z_2(z) = \hat{Z}_2(z) - ig'(z)$$

である。ここで、 $g(z) = g_R(z) + g_I(z)$ は任意でよい。また、式(2.70)より

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2} [Z_1(z) - iZ_2(z)] = \frac{1}{2} [\hat{Z}_1(z) - i\hat{Z}_2(z)] \quad (2.73)$$

である。特に $\hat{Z}_1(z)$, $\hat{Z}_2(z)$ のみで取り扱うことのできる問題では $g(z) = 0$ であり、その場合には $Z_1(z) = \hat{Z}_1(z)$, $Z_2(z) = \hat{Z}_2(z)$ である。これ以後本書では、 $Z_1(z)$, $Z_2(z)$ も Westergaard の応力関数と呼ぶことにする。

[6] 面外せん断問題 これまで考えてきた平面問題とは異なるが、変位成分が

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = u_z(x, y) \quad (2.74)$$

となる問題も2次的に扱うことができる。この場合零でないひずみ成分、応力成分は面外成分

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = G \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.75)$$

のみで、いずれも x, y のみの関数である。変位が式(2.74)で与えられる場合を面外せん断 (anti-plane shear) の状態という。非常に長い柱状物体の軸方向に z 軸をとったとき、外力が z 成分のみをもち、しかも z 軸方向に一樣に作用していれば、物体の両端から離れた所で面外せん断の状態を考えることができる。式(2.75)を応力のつり合い式(2.5b)に用いると

$$\nabla^2 u_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0 \quad (2.76)$$

となり、面外変位 u_z は調和関数となる。式(2.51)で述べたように複素数 $z = x + iy$ の解析関数の実部、虚部は調和関数であるから、 u_z は一般に解析関数の実部で表すことができる。座標軸を表す添字 x と複素数 z とがまぎらわしいので、 $u_z = w$ と書くことにすると

$$w = \frac{1}{G} \operatorname{Re}[\zeta(z)] \quad (w = u_x) \quad (2.77)$$

であり、式 (2.75), (2.45) より

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \zeta'(z) \quad (2.78)$$

となる。後にき裂先端近傍の応力場を考える場合、Westergaard の応力関数 $Z_1(z)$, $Z_2(z)$ に対応するものは

$$Z_2(z) = i\zeta'(z) \quad (2.79)$$

である [式 (2.140b)]。この $Z_2(z)$ を用いるときには

$$w = \frac{1}{G} \operatorname{Im} \left[\int Z_2(z) dz \right] \quad (2.80)$$

$$\tau_{yz} = \operatorname{Re}[Z_2(z)], \quad \tau_{xz} = \operatorname{Im}[Z_2(z)] \quad (2.81)$$

である。これから明らかなように、一様応力場 $\tau_{yz} = s_y^0$, $\tau_{xz} = s_x^0$ を与える応力関数は

$$Z_2(z) = s_y^0 + i s_x^0 \quad (2.82)$$

である。

2.7 き裂をもつ物体の基本的な変形¹²⁻¹⁴⁾

この節以後は、きわめて薄い割れ目が生じている物体を考えるが、このような割れ目はき裂または割れ (crack) と呼ばれ、その進展挙動と物体に加えられる力学的作用との関係を明らかにすることが破壊力学の主要な問題となる。この問題を考えるためには、まずき裂まわり、特にき裂先端近傍の力学的状態 (応力場、ひずみ場) がどのようなものであるかを知らねばならない。特に、き裂の進展が非弾性的な変形をほとんど生じない場合には、き裂まわりの応力場を線形弾性論によって一応知ることができ、この結果に基づいてき裂進展の条件式を具体的に示示することができる (線形破壊力学)。ここでは、前節の複素応力関数を用いてき裂まわりの代表的な 2 次元応力場、変位場を求めてその特徴を説明する。

[1] 引 張 り 長さ $2a$ の直線き裂をも

つ無限板を考え、図 2.20 のように x, y 軸をとる。この板が無限遠方で一様な等方引張りを受ける場合の応力、変位を求める。無限遠に作用する一様引張り応力を σ_0 とし、き裂表面には外力が作用していないとする。したがって、境界条件はこのような巨視的な取り扱いにおいては、き裂は上下面の間隔が零である切れ目であり、変形による変位が一般に不連続となる面である。

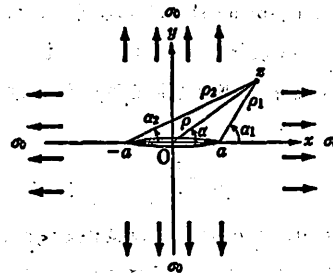


図 2.20 等方引張り応力 σ_0 を受けるき裂

$$\left. \begin{array}{l} \text{無限遠方で} \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_0, \quad \tau_{xy} = 0 \\ \text{き裂面 } (y=0, -a < x < a) \text{ 上で} \quad \tau_{xy} = \sigma_y = 0 \end{array} \right\} \quad (2.83a)$$

である。この問題は x 軸に関して対称な問題であり、 τ_{xy} はき裂表面だけでなく y 軸上のすべてにおいて零である。応力関数 $Z_1(z)$, $Z_2(z)$ を用いることにすると、 $Z_2(z) = 0$ ならば x 軸上で $\tau_{xy} = 0$ であるからまず $Z_2(z) = 0$ としておく。すると、条件式 (2.83a) は式 (2.71) により

$$\left. \begin{array}{l} y=0, -a < x < a \text{ で} \quad \sigma_y = \operatorname{Re}[Z_1(z)] = 0 \\ |z| \rightarrow \infty \text{ で} \quad \sigma_x = \sigma_y = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[Z_1(z)] = \sigma_0, \\ \tau_{xy} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \{-y \operatorname{Re}[Z_1'(z)]\} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.83b)$$

と表せる。したがって、 $Z_1(z)$ は x 軸上 $-a < x < a$ で純虚数となり、十分遠方では σ_0 となる関数である。Westergaard^{11,12)} により与えられた

$$Z_1(z) = \frac{\sigma_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.84)$$

は条件式 (2.83b) を満たしていることがわかる。ただし、ここで $\sqrt{z^2 - a^2}$ については少し注意が必要である。 $f(z) = \sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{(z-a)(z+a)}$ を考えるために

$$z-a = \rho_1 e^{i\alpha_1}, \quad z+a = \rho_2 e^{i\alpha_2}$$

と極表示すると

$$f(z) = \sqrt{\rho_1 e^{i\alpha_1} \cdot \rho_2 e^{i\alpha_2}} = \sqrt{\rho_1 \rho_2} \exp\left(i \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \quad (2.85)$$

となる。いま、点 z が点 $z=-a$ を囲まず点 $z=a$ だけを囲む閉曲線に沿って反時計まわりに 1 周して、もとの位置にもどったと考える。このとき $z+a$ の偏角 α_2 は変わらず、 $z-a$ の偏角 α_1 は 2π 増加するので $f(z)$ の符号が変わる。点 $z=-a$ だけを 1 周してもとの位置にもどっても同様で、 $f(z)$ の符号が変わる。このように、 $f(z) = \sqrt{z^2 - a^2}$ は同一点 z で符号のみが異なる二つの値をもつ 2 価関数である。しかし、 $z=a$, $z=-a$ 点を同時に反時計まわりに 1 周してもとの点にもどったとすると、 $z-a$, $z+a$ の偏角 α_1, α_2 がいずれも 2π だけ増加するので $\alpha_1 + \alpha_2$ は 4π 増加することになり $f(z)$ の値は変わらない。そこで、 $z=a$ と $z=-a$ の間に切れ目が入っていて、 $z=a$ あるいは $z=-a$ だけを 1 周することはできないと考えることにすれば、 $f(z)$ を 1 価関数として扱うことができる。このように考えると、符号のみが異なる 2 組の 1 価関数 (二つの分岐) が得られることになり、そのうち

$$|z| \rightarrow \infty \text{ で} \quad f(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \rightarrow z \quad (2.86)$$

を満たすものを主分岐という。式 (2.84) に現れる $\sqrt{z^2 - a^2}$ は、分岐点 $z = \pm a$ を結ぶ切れ目にき裂面をとり、式 (2.86) で指定される主分岐をとっている。

さて、 $Z_1(z)$ の表す応力、変位を式 (2.71), (2.72) から計算する際には

$$Z_1(z) = \frac{\sigma_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad Z_1'(z) = \frac{-\sigma_0 a^2}{(\sqrt{z^2 - a^2})^3}, \quad \int Z_1(z) dz = \sigma_0 \sqrt{z^2 - a^2}$$

の実部と虚部を求めなければならない。このために図2・20のように (ρ, α) , (ρ_1, α_1) , (ρ_2, α_2) をとって $-\pi < \alpha, \alpha_1, \alpha_2 < \pi$ とすれば式(2・86)を考えていることになり

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{z^2 - a^2} &= \sqrt{\rho_1 \rho_2} \exp\left(i \frac{2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) = \sqrt{\rho_1 \rho_2} \left[\cos\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \right] \\ \frac{1}{(\sqrt{z^2 - a^2})^3} &= \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2} \exp\left[i \frac{2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right]} = \frac{1}{(\sqrt{\rho_1 \rho_2})^3} \exp\left[-i \frac{3}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right] \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\rho_1 \rho_2})^3} \left[\cos\frac{3}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - i \sin\frac{3}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \\ \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} &= \frac{\rho e^{i\alpha}}{\sqrt{\rho_1 \rho_2} \exp\left[i \frac{2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right]} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \exp\left[i\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\rho}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \left[\cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) + i \sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 87)$$

である。これらを用いれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 \frac{\rho}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \left[\cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) - \frac{a^2}{\rho_1 \rho_2} \sin \alpha \sin \frac{3}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \\ \sigma_y &= \sigma_0 \frac{\rho}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \left[\cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) + \frac{a^2}{\rho_1 \rho_2} \sin \alpha \sin \frac{3}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \\ \tau_{xy} &= \sigma_0 \frac{\rho}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \left[\frac{a^2}{\rho_1 \rho_2} \sin \alpha \cos \frac{3}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 88)$$

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= \sigma_0 \sqrt{\rho_1 \rho_2} \left[\frac{\kappa - 1}{2} \cos\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) - \frac{\rho^2}{\rho_1 \rho_2} \sin \alpha \sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \right] \\ 2Gu_y &= \sigma_0 \sqrt{\rho_1 \rho_2} \left[\frac{\kappa + 1}{2} \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) - \frac{\rho^2}{\rho_1 \rho_2} \sin \alpha \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 89)$$

となる。

まず、 x 軸上での応力、変位の様子を調べてみる。もちろん $x > 0$ の部分を考えておけばよい。 $\rho = x$ と書き直すことにすると $\rho_1 = |x - a|$, $\rho_2 = x + a$ であり、 $x > a$ では $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $a > x > 0$ ではき裂上面で $\alpha = \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \pi$, き裂下面で $\alpha = \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = -\pi$ である。これらを式(2・88)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} x > a \text{ で } \quad \sigma_x = \sigma_y = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad \tau_{xy} = 0 \\ u_x = \frac{\sigma_0(\kappa - 1)}{4G} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad u_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 90)$$

$$a > x > 0 \text{ で } \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad u_x = 0$$

$$\text{き裂上面で } u_y = \frac{\sigma_0(\kappa + 1)}{4G} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\text{き裂下面で } u_y = -\frac{\sigma_0(\kappa + 1)}{4G} \sqrt{a^2 - x^2}$$

(2・91)

となる。 $x > a$ での $\sigma_y(x, 0)$ の様子を図2・21に示す。き裂先端から測った距離 $r = x - a$ を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y(x, 0)}{\sigma_0} &= \frac{r + a}{\sqrt{r(r + 2a)}} \\ &= \frac{1 + r/a}{\sqrt{2(r/a)(1 + r/2a)}} \\ &= \frac{1 + a/r}{\sqrt{1 + 2a/r}} \end{aligned}$$

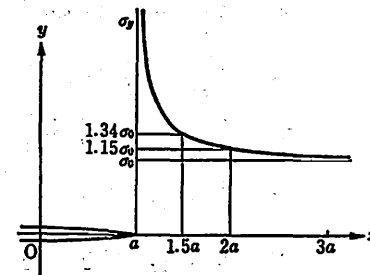


図2・21 x 軸上の応力成分 σ_y

である。き裂先端付近 $r/a \ll 1$ では r/a で展開して

$$\frac{\sigma_y(x, 0)}{\sigma_0} = \sqrt{\frac{a}{2r}} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{r}{2a}} + \dots = \sqrt{\frac{a}{2r}} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{a} \right) + \dots \right]$$

であり、き裂から十分離れた所 $r/a \gg 1$ では a/r で展開して

$$\frac{\sigma_y(x, 0)}{\sigma_0} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \dots$$

となる。このように x 軸上の σ_y は、き裂先端で $r^{-1/2}$ の特異性を示し、き裂から離れた所では r^{-2} で急速に σ_0 に近づく。特にき裂先端近傍の応力は、展開の第1項のみをとって

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (2 \cdot 92)$$

と表すことができる。

き裂先端近傍の変位 u_x も $r = x - a$, $r/a \ll 1$ を用いて展開し、第1項のみをとって

$$u_x(x, 0) = \frac{\kappa - 1}{2} \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

と表すことができる。

また、き裂面の変位(2・91)式から、き裂は変形により楕円となることもわかる。破壊力学では、き裂先端近傍に注目するから、き裂先端 $x = a$, $y = 0$ を原点とする極座標 (r, θ) を用い、 $r/a \ll 1$ に対する応力、変位を表しておくのがよい。これは $Z_1(z)$ に $z = a + re^{i\theta}$ を用いて求めることができるが、ここでは式(2・88)を利用すればよい。 r, θ のとり方から $r = \rho_1$, $\theta = \alpha_1$ であり、 $\rho \sin \alpha = r \sin \theta$, $\rho \cos \alpha = a + r \cos \theta$ である。そうするとたとえば σ_x は

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{r \rho_2}} \left[(a + r \cos \theta) \cos\left(\frac{\theta + \alpha_2}{2}\right) + r \sin \theta \sin\left(\frac{\theta + \alpha_2}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2}{\rho_2} \sin \theta \sin \frac{3}{2}(\theta + \alpha_2) \right] \end{aligned}$$

と書ける。ここで $r/a \ll 1$, したがって、 $\rho_2 \approx 2a$, $\alpha_2 \approx 0$ を用いればよい。その結果は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 93)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_y &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 94)$$

である。ここで

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (2 \cdot 95)$$

である。き裂近傍の応力成分はすべて共通な係数 K_I をもち $r^{-1/2}$ の特異性を示すことがわかる。この場合、き裂両面の相対変位は先端近傍に限らずどこでもき裂面に垂直方向である。一般に、き裂先端近傍の変形様式で両面がこのような相対変位しているものを、モード I (mode I) あるいは開口型 (opening mode) という (図 2・22)。予想されることではあるが、モード I の変形では、き裂先端近傍の応力場・変位場はすべて式 (2・93)、(2・94) と同じ形 (r, θ 依存性) をとり、物体形状、き裂形状、荷重条件というき裂先端から離れた所の状況の違いは、係数 K_I の違いに現れてくる。 K_I はモード I の変形に対する応力拡大係数 (stress intensity factor)^{15,16)} と呼ばれるもので、き裂先端近傍の応力場の強さの程度を示す係数と考えることができる。

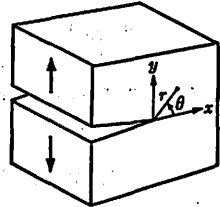


図 2・22 モード I の変形

次に、無限遠方で一様な y 方向の単軸引張りを受ける場合について考える。境界条件は無限遠方で

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = \sigma_0$$

$y=0, -a < x < a$ (き裂面上) で $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$

である。き裂の問題に限らず、一般に加え合わせる (重ね合わせる) ことによって、ちょうど境界条件を満足するという 2 組の応力場に分けて問題を解くこともできる。このような 2 組の応力場を求める問題が基本的なものになるか、あるいは既に解かれているものになれば、この重ね合わせの方法が特に有効となる。そこで求める応力を 2 組の応力の和

$$\sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}$$

と考えれば、それぞれの応力はたとえば

$$\begin{aligned} (a) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{無限遠方で} \\ y=0, -a < x < a \text{ で} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{(1)} = -\sigma_0, \quad \sigma_y^{(1)} = \tau_{xy}^{(1)} = 0 \\ \sigma_y^{(1)} = \tau_{xy}^{(1)} = 0 \end{array} \right. \\ (b) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{無限遠方で} \\ y=0, -a < x < a \text{ で} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{(2)} = \sigma_y^{(2)} = \sigma_0, \quad \tau_{xy}^{(2)} = 0 \\ \sigma_y^{(2)} = \tau_{xy}^{(2)} = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

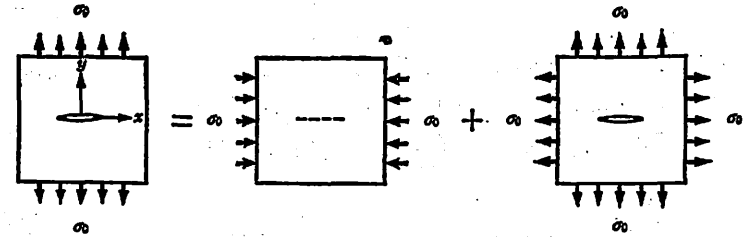


図 2・23 単軸引張応力 σ_0 を受けるき裂

を満たすものであればよい。問題 (a) はき裂をもたない無限板の x 方向の一様圧縮であり、(b) の問題はき裂をもつ無限板の等方引張りである。このような重ね合わせを示したのが図 2・23 である。問題 (a) の応力はもちろん $\sigma_x^{(1)} = -\sigma_0, \sigma_y^{(1)} = \tau_{xy}^{(1)} = 0$ で、問題 (b) の応力は式 (2・88) で与えられる。したがって、応力関数は

$$Z_1(z) = \frac{\sigma_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad Z_2 = -\frac{i}{2} \sigma_0 \quad (2 \cdot 96)$$

である。き裂先端における応力の特異性には、(a) の解である一様圧縮応力は関係しないので、この場合の K_I は式 (2・95) と同じく

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$$

である。

【例題 2・2】 図 2・20 で無限遠方には外力は作用していないが、き裂内面に一様な圧力 p_0 が作用している。応力関数、応力拡大係数を求めよ。

〔解〕 境界条件は、

無限遠方で $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$

き裂面上 ($y=0, -a < x < a$) で $\tau_{xy} = 0, \sigma_y = -p_0$

である。この条件は、 $\sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}, \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}$ として

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{無限遠方で} \\ y=0, -a < x < a \text{ で} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{(1)} = \tau_{xy}^{(1)} = 0, \quad \sigma_y^{(1)} = -p_0 \\ \tau_{xy}^{(1)} = 0, \quad \sigma_y^{(1)} = -p_0 \end{array} \right.$$

および

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{無限遠方で} \\ y=0, -a < x < a \text{ で} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{(2)} = \tau_{xy}^{(2)} = 0, \quad \sigma_y^{(2)} = p_0 \\ \sigma_y^{(2)} = \tau_{xy}^{(2)} = 0 \end{array} \right.$$

と考えることができる。(a) の問題はき裂のない無限板の一様圧縮であり、(b) の問題はき裂のある無限板の一様引張りである。これを図 2・24 に示す。(a) の問題の応力関数は $Z_1(z) = -p_0, Z_2(z) = (i/2)p_0$ であり、(b) の問題の応力関数は式 (2・96) である。したがって、この場合の応力関数はこれらの和

$$Z_1(z) = p_0 \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \quad (2 \cdot 97)$$

である。また、(a) はき裂先端での応力の特異性には関係しないから、この場合も

$$K_I = p_0 \sqrt{\pi a} \quad (2 \cdot 98)$$

である。

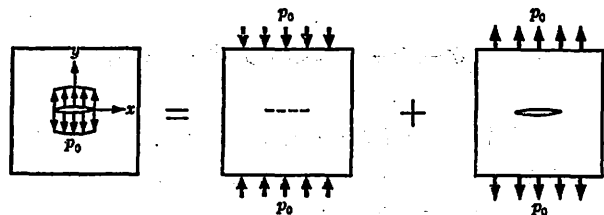


図 2-24 一様な内圧を受けるき裂

〔2〕面内せん断 次に、長さ $2a$ のき裂をもつ無限板が、無限遠方で一様なせん断応力 τ_0 を受ける場合を考える (図 2-25)。この場合の境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} \text{無限遠方で} \quad \sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_0 \\ \text{き裂表面 (} y=0, -a < x < a \text{) で} \\ \quad \tau_{xy} = \sigma_y = 0 \end{array} \right\} \quad (2 \cdot 99)$$

である。問題は x 軸に関して反対称であり、 x 軸上では $\sigma_y = 0$ である。応力関数として $Z_I(z) = 0$ で

$$Z_{II}(z) = \frac{\tau_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2 \cdot 100)$$

をとれば条件 (2・99) 式が満たされる。

き裂先端近傍の応力と変位を求めるためにき裂先端を原点とする極座標を (r, θ) とする。 $z = a + re^{i\theta}$ を式 (2・100) に代入して

$$Z_{II}(z) = \frac{\tau_0(a + re^{i\theta})}{\sqrt{(2a + re^{i\theta})re^{i\theta}}}$$

となるが、き裂先端近傍 $r/a \ll 1$ に対しては

$$Z_{II}(z) = \frac{\tau_0 a}{\sqrt{2ar}} e^{-i(\theta/2)}$$

と近似できる。同様にして $r/a \ll 1$ で

$$Z_{II}'(z) = -\frac{\tau_0 a^2}{(2ar)^{3/2}} e^{-i(3\theta/2)}, \quad \int Z_{II}(z) dz = \tau_0 \sqrt{2ar} e^{i(\theta/2)}$$

である。これらを式 (2・71), (2・72) に代入して、き裂先端近傍の応力、変位は

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{array} \right\} \quad (2 \cdot 101)$$

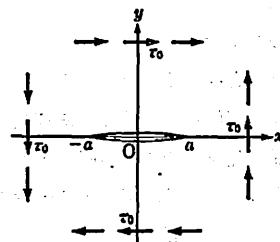
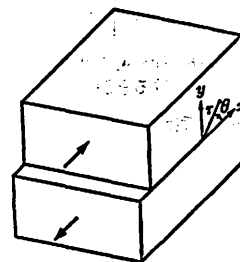
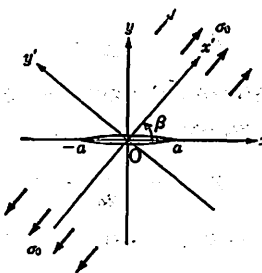
図 2-25 面内せん断応力 τ_0 を受けるき裂

図 2-26 モード II の変形

図 2-27 斜めの単軸引張り応力 σ_0 を受けるき裂

【例題 2・3】 図 2-27 のように x 軸上にあるき裂と角 β をなす方向の一様引張り応力が無限遠方で作用している。応力関数、応力拡大係数を求めよ。

〔解〕 引張り方向を x' 軸とする。 $x'y'$ 座標系での応力成分で無限遠方の条件を書くと

$$\text{無限遠方で} \quad \sigma_{x'} = \sigma_0, \quad \sigma_{y'} = \tau_{x'y'} = 0$$

である。応力成分の変換則式 (2・10) を用いて、 xy 座標系の成分で表すと

$$\text{無限遠方で} \quad \sigma_x = \frac{1}{2}\sigma_0(1 + \cos 2\beta), \quad \sigma_y = \frac{1}{2}\sigma_0(1 - \cos 2\beta), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\beta$$

である。もちろんき裂面 ($y=0, -a < x < a$) 上では $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ である。この場合には、無限遠方で一様単軸引張り $\sigma_y = \frac{1}{2}\sigma_0(1 - \cos 2\beta)$ を受けるき裂、一様面内せん断 $\tau_{xy} = \frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\beta$ を受けるき裂、

一様単軸引張り $\sigma_x = \frac{1}{2}\sigma_0(1 + \cos 2\beta)$ を受けるき裂のない無限板の解を重ね合わせればよい。前二者の応力関数は式 (2・96), (2・100) で、最後の単軸引張りの応力関数は $Z_I(z) = i\sigma_0/4(1 + \cos 2\beta)$ である。これらにより

$$Z_I(z) = \frac{\sigma_0}{2} \frac{(1 - \cos 2\beta)z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad Z_{II}(z) = \frac{\sigma_0}{2} \left[i \cos 2\beta + \frac{(\sin 2\beta)z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] \quad (2 \cdot 104)$$

となる。また、き裂先端近傍の特異応力場も式 (2・93) と式 (2・101) の和であるから

$$\left. \begin{array}{l} u_x = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{1+\kappa}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_y = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\kappa}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{array} \right\} \quad (2 \cdot 102)$$

と表される。ここで

$$K_I = \tau_0 \sqrt{\pi a} \quad (2 \cdot 103)$$

である。式 (2・101) の応力は、 $r^{-1/2}$ の特異性をもち、き裂長さ $2a$ 、外力 τ_0 は一つの係数 K_I に含まれている。この場合には、き裂両面はその面内で相対的にずらされている。き裂先端近傍でこのようなずれによって生じている変形をモード II (mode II) の変形あるいは面内せん断型 (in-plane shear mode) の変形といい (図 2-26) き裂先端近傍の応力場・変位場は、一般的に式 (2・101), (2・102) の形で表される。この場合の係数 K_{II} をモード II の変形に対する応力拡大係数という。

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \sigma_0 \frac{1 - \cos 2\beta}{2} \sqrt{\pi a} = \sigma_0 \sin^2 \beta \sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= \sigma_0 \frac{\sin 2\beta}{2} \sqrt{\pi a} = \sigma_0 \sin \beta \cos \beta \sqrt{\pi a} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 105)$$

である。

〔3〕面外せん断 無限遠方で xy 面に垂直方向の一様なせん断応力 s_0 が作用する場合 (図2・28) は面外せん断の問題であり、変位 $u_z(x, y) = w(x, y)$ 、応力 $\tau_{yz}(x, y)$ 、 $\tau_{xz}(x, y)$ を考えればよい。境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \text{無限遠方で} \\ \tau_{yz} = s_0, \quad \tau_{xz} = 0 \\ \text{き裂面 } (y=0, -a < x < a) \text{ 上で} \\ \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 106)$$

である。式 (2・81) により応力関数

$$Z_{II}(z) = \frac{s_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2 \cdot 107)$$

は上の条件を満たすものであることがわかる。

き裂先端近傍を調べるために $z = a + re^{i\theta}$ を用いると $r/a \ll 1$ では

$$Z_{II}(z) = -\frac{s_0 a}{\sqrt{2\pi r}} e^{-i(\theta/2)}$$

で、式 (2・80)、(2・81) より応力、変位は

$$\tau_{yz} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2 \cdot 108)$$

$$u_z = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2 \cdot 109)$$

である。ここで

$$K_{II} = s_0 \sqrt{\pi a} \quad (2 \cdot 110)$$

は、やはりき裂長さ $2a$ 、外力 s_0 に関する係数である。この場合のようにき裂先端近傍がき裂面の面外方向のずれで変形する様子をモードⅢ (mode Ⅲ) あるいは面外せん断型 (anti-plane shear mode) という (図2・29)。モードⅢの変形では、き裂先端近傍の応力場・変位場は一般に式 (2・108)、(2・109) の形をとり、 K_{II} がこのモードの応力拡大係数である。

応力関数 (2・84)、(2・100)、(2・107) は同じ形であるが、これは x 軸上 $-a < x < a$ で零となる応力成分がいずれの場合にも x 軸上で $\text{Re}[z]$ と表されるからである。

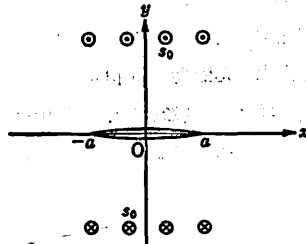


図2・28 面外せん断応力 s_0 を受けるき裂

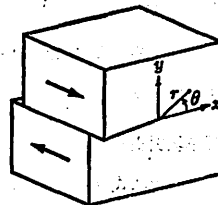


図2・29 モードⅢの変形

2・8 き裂先端近傍の応力場・変位場¹⁷⁻¹⁹⁾

これまでに求めたき裂先端近傍の応力・変位は、直線き裂でしかも無限遠に作用する一様荷重に対するものである。これらの式からも明らかなように、き裂先端近傍のたとえば応力の程度、いいかえれば応力成分に共通な係数 K_I, K_{II}, K_{III} は、き裂長さ $2a$ 、負荷応力 σ_0, τ_0, s_0 に関係しておりき裂先端近傍の状況だけからでは決まらない。しかし、そのような共通の係数を別にしたき裂先端近傍の応力の r, θ 依存関係は、き裂先端近傍の状況が同じであれば一般に成り立つと考えられる。一般的なき裂でも、その先端近傍だけを考えれば直線き裂とみなすことができるから、先端近傍でき裂両縁が相対的に開口変位 (き裂面に垂直方向の変位) を受けている状況 (モードⅠ) であれば、式 (2・93)、(2・94) が成り立つ。同様に先端近傍でき裂両縁が相対的に面内のずり変位あるいは面外のずり変位を生じている場合 (モードⅡ, Ⅲ) には一般に式 (2・101)、(2・102) あるいは (2・108)、(2・109) が成り立つ。き裂両縁の一般的な相対変位は、これら三つの変位の重ね合わせであるから、き裂先端近傍の応力・変位も対応する応力・変位の重ね合わせになっている。そしてこれらの重ね合わせの係数にあたる K_I, K_{II}, K_{III} は、き裂近傍がまわりからこれらの変形様式をどの程度強制されているかを表現しているパラメータであり、当然き裂近傍の周囲の変形状態、したがって結局物体形状、き裂形状、負荷の状態から決まってくる。以上のことを一般的に確かめてみよう。

き裂先端近傍では、き裂の両縁は開き角 0 の直線である。また、先端近傍の両縁には外力は作用していないとする。き裂先端を原点とする図2・30の座標 (x, y) 、 (r, θ) を併用する。まず平面問題を考える²⁰⁾。境界条件は、き裂先端近傍の両縁 $\theta = \pm \pi (y=0, x < 0)$ で

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (2 \cdot 111 a)$$

である。式 (2・52 a) を用いて $\sigma_y + i\tau_{xy}$ をつくり、上の条件を表すと

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + \bar{z}\varphi''(z) + \phi''(z) = 0 \quad (2 \cdot 111 b)$$

である。 $z = re^{i\theta}$ であり、この条件がき裂先端近傍ではあるが任意の r に対して成り立たなければならないことに注意すれば

$$\varphi(z) = Ax^\lambda, \quad \varphi'(z) = Bx^\lambda \quad (2 \cdot 112)$$

の形の応力関数を考えることができる。ここで λ を実数と考えると

$$\varphi'(z) = A\lambda z^{\lambda-1} = A\lambda r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)\theta}, \quad \overline{\varphi'(z)} = \bar{A}\lambda r^{\lambda-1} e^{-i(\lambda-1)\theta}$$

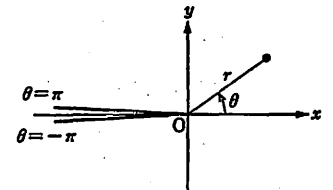


図2・30 き裂先端を原点とする座標系

$$\varphi''(z) = A\lambda(\lambda-1)z^{\lambda-2} = A\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}e^{i(\lambda-2)\theta}, \quad \psi''(z) = B\lambda r^{\lambda-1}e^{i(\lambda-1)\theta}$$

であり, $\theta = \pm\pi$ として式 (2・111b) に代入すれば

$$[(A\lambda+B) + \bar{A}e^{-2i(\lambda-1)\pi}]r^{\lambda-1}e^{i(\lambda-1)\pi} = 0$$

$$[(A\lambda+B) + \bar{A}e^{2i(\lambda-1)\pi}]r^{\lambda-1}e^{-i(\lambda-1)\pi} = 0$$

となる. $\lambda=0$ は, $\varphi(z)=A$, $\psi'(z)=B$ で剛体変位にあたるのでこれを除くと $e^{i(\lambda-1)\pi} \neq 0$ で r が任意であるから

$$(A\lambda+B) + \bar{A}e^{-2i(\lambda-1)\pi} = 0, \quad (A\lambda+B) + \bar{A}e^{2i(\lambda-1)\pi} = 0 \quad (2 \cdot 113)$$

でなければならない. したがって, $A=B=0$ でないためには

$$e^{-2i\lambda\pi} = e^{2i\lambda\pi} \quad \text{すなわち} \quad \sin 2\pi\lambda = 0$$

が成り立たねばならず

$$\lambda = \frac{n}{2} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2 \cdot 114)$$

となる. $n=0$ ($\lambda=0$) は先に述べた理由から除いてよい. また, $n < 0$ であれば式 (2・55) からき裂端で変位が無限大に発散することになる. したがって, n としては正の整数をとらなければならない. 式 (2・114) を式 (2・113) に代入すれば

$$B = -\frac{n}{2}A - (-1)^n \bar{A} \quad (2 \cdot 115a)$$

である. A, B の実部を A^0, B^0 , 虚部を A', B' とすれば上式より

$$B^0 = -\left[\frac{n}{2} + (-1)^n\right]A^0, \quad B' = \left[-\frac{n}{2} + (-1)^n\right]A' \quad (2 \cdot 115b)$$

となる. 正の整数 n に対応する $\varphi(z), \psi'(z)$ であることを明示するために添字 n をつけることにすると, 結局

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(z) &= A_n z^{n/2}, \quad \psi'_n(z) = B_n z^{n/2} \\ B_n &= -\frac{n}{2}A_n - (-1)^n \bar{A}_n \\ (B_n^0 &= -\left[\frac{n}{2} + (-1)^n\right]A_n^0, \quad B_n' = \left[-\frac{n}{2} + (-1)^n\right]A_n') \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 116)$$

で与えられる $\varphi_n(z), \psi'_n(z)$ は式 (2・111a) を満たす応力関数である. $\varphi_n(z), \psi'_n(z)$ が表す応力, 変位は式 (2・52a), (2・55) より

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{n}{2}(A_n z^{(n/2)-1} + \bar{A}_n \bar{z}^{(n/2)-1}) \\ \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) + i\tau_{xy} &= \frac{n}{2}\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)A_n \bar{z} z^{(n/2)-2} + B_n z^{(n/2)-1}\right] \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 117a)$$

$$2G(u_x + iu_y) = \kappa A_n z^{n/2} - \frac{n}{2}\bar{A}_n \bar{z} z^{(n/2)-1} - \bar{B}_n \bar{z}^{n/2} \quad (2 \cdot 117b)$$

である. $z = re^{i\theta}$, $A_n = A_n^0 + iA_n'$, $B_n = B_n^0 + iB_n'$ を用いて各成分について表せば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{n}{2}r^{(n/2)-1} \left\{ A_n^0 \left[\left(2 + \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \cos\left(1 - \frac{n}{2}\right)\theta + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \cos\left(3 - \frac{n}{2}\right)\theta \right] \right. \\ &\quad \left. + A_n' \left[\left(2 + \frac{n}{2} - (-1)^n\right) \sin\left(1 - \frac{n}{2}\right)\theta + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \sin\left(3 - \frac{n}{2}\right)\theta \right] \right\} \\ \sigma_y &= \frac{n}{2}r^{(n/2)-1} \left\{ A_n^0 \left[\left(2 - \frac{n}{2} - (-1)^n\right) \cos\left(1 - \frac{n}{2}\right)\theta - \left(1 - \frac{n}{2}\right) \cos\left(3 - \frac{n}{2}\right)\theta \right] \right. \\ &\quad \left. + A_n' \left[\left(2 - \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \sin\left(1 - \frac{n}{2}\right)\theta - \left(1 - \frac{n}{2}\right) \sin\left(3 - \frac{n}{2}\right)\theta \right] \right\} \\ \tau_{xy} &= \frac{n}{2}r^{(n/2)-1} \left\{ A_n^0 \left[\frac{n}{2} + (-1)^n \right] \sin\left(1 - \frac{n}{2}\right)\theta + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \sin\left(3 - \frac{n}{2}\right)\theta \right. \\ &\quad \left. - A_n' \left[\frac{n}{2} - (-1)^n \right] \cos\left(1 - \frac{n}{2}\right)\theta + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \cos\left(3 - \frac{n}{2}\right)\theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 118a)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2G}r^{(n/2)} \left\{ A_n^0 \left[\left(\kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \cos \frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \cos\left(\frac{n}{2} - 2\right)\theta \right] \right. \\ &\quad \left. - A_n' \left[\left(\kappa + \frac{n}{2} - (-1)^n\right) \sin \frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2} \sin\left(2 - \frac{n}{2}\right)\theta \right] \right\} \\ u_y &= \frac{1}{2G}r^{(n/2)} \left\{ A_n^0 \left[\left(\kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n\right) \sin \frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \sin\left(2 - \frac{n}{2}\right)\theta \right] \right. \\ &\quad \left. + A_n' \left[\left(\kappa - \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \cos \frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2} \cos\left(2 + \frac{n}{2}\right)\theta \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 118b)$$

である.

き裂先端近傍での一般の応力場, 変位場は各 n に対する式 (2・118a), (2・118b) の重ね合わせによって求まることになる. この時の重ね合わせの係数である A_n^0, A_n' は, き裂先端近傍から離れた所での条件から決まるものである. しかし, 式 (2・118a), (2・118b) で与えられる応力, 変位における r のべき指数をみると, $n=1$ のものが最小で, n の増加とともに $1/2$ ずつ大きくなっている. いまは, き裂先端近傍を考えているわけであるから, r は十分小さく 0 に近い (き裂を特徴づける代表的な寸法を a とすると $r/a \ll 1$ である). したがって, き裂先端近傍の応力場, 変位場の支配的な部分は, 式 (2・118a), (2・118b) において $n=1$ としたものである. たとえば, $n=1$ に対する σ_x は

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A_1^0 \left(\frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{5}{2} \theta \right) + A_1' \left(\frac{7}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{5}{2} \theta \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A_1^0 \left[2 \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{5}{2} \theta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right] - A_1' \left[-4 \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \left(\sin \frac{5}{2} \theta - \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A_1^0 \left(2 \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3}{2} \theta \sin \theta \right) - A_1' \left(-4 \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3}{2} \theta \sin \theta \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A_1^0 \left(2 \cos \frac{\theta}{2} - 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) \right. \end{aligned}$$

$$+A_1' \left(4 \sin \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A_1^0 \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) + A_1' \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \right) \right]$$

である。sin, cos の項をこのように整理し

$$A_1^0 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}, \quad A_1' = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2 \cdot 119)$$

と書き直すことにすると, $n=1$ に対する式 (2・118 a), (2・118 b) は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \end{Bmatrix} \\ + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) \end{Bmatrix} \quad (2 \cdot 120)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \\ + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa+1}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\kappa}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (2 \cdot 121)$$

となる。式 (2・120), (2・121) の右辺のはじめの部分は, 式 (2・93), (2・94) と同じであり, あとの部分は式 (2・101), (2・102) と同じである。このように, き裂近傍の一般的な平面変形はモード I の変形とモード II の変形の重ね合わせになっており, 重ね合わせにおけるこれらのモードの重みにあたるのが応力拡大係数 K_I , K_{II} である。式 (2・119) からわかるように, K_I , K_{II} の値はき裂先端近傍の条件からは決まらず境界条件, 負荷条件から決まるものである。

つぎに, 一般的な面外変形を受けているき裂先端近傍を考えよう²¹⁾。変位としては u_z , 応力としては τ_{yz} , τ_{zx} だけを考えればよい。き裂先端近傍のき裂両縁では

$$\tau_{yz} = 0 \quad (2 \cdot 122 a)$$

である。上と同様に, 式 (2・78) の応力関数 $\zeta(z)$ が λ を実数として

$$\zeta(z) = Cz^{\lambda} \quad (2 \cdot 123)$$

の形となるものを調べる。式 (2・78), (2・122 a) より, $\zeta(z)$ はき裂近傍の $\theta = \pm\pi$ で

$$\tau_{yz} = \frac{i}{2} [\zeta'(z) - \bar{\zeta}'(\bar{z})] = 0 \quad (2 \cdot 122 b)$$

を満たさなくてはならない。 $z = re^{i\theta}$ と表すと式 (2・123) より

$$\zeta'(z) = C\lambda z^{\lambda-1} = C\lambda r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)\theta}, \quad \bar{\zeta}'(\bar{z}) = \bar{C}\lambda r^{\lambda-1} e^{-i(\lambda-1)\theta}$$

であるから式 (2・122 b) は

$$\begin{cases} [C - \bar{C} e^{-2i(\lambda-1)\pi}] \lambda r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)\pi} = 0 \\ [C - \bar{C} e^{2i(\lambda-1)\pi}] \lambda r^{\lambda-1} e^{-i(\lambda-1)\pi} = 0 \end{cases} \quad (2 \cdot 124)$$

となる。 $\lambda=0$ の場合は $\zeta=C$ となり式 (2・77) より剛体変位にあたる。したがって, $\lambda \neq 0$ としてよいから, 上式より $C \neq 0$ であるためには

$$e^{-2i(\lambda-1)\pi} = e^{2i(\lambda-1)\pi} \quad \text{すなわち} \quad \sin 2\pi\lambda = 0$$

でなければならず

$$\lambda = \frac{n}{2} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2 \cdot 125)$$

となる。この場合にも, 式 (2・77) から $n < 0$ であれば変位が $r \rightarrow 0$ で無限大となり, 解として不適当になる。したがって n は正の整数であり, 式 (2・124) より

$$C - \bar{C} e^{-2i(n/2-1)\pi} = C - (-1)^n \bar{C} = 0 \quad (2 \cdot 126)$$

である。 C の実部, 虚部を C^0 , C' とすれば, これは n が偶数のとき $C = C^0$, 奇数のとき $C = iC'$ を意味している。

n に依存することを明示すると

$$\zeta_n(z) = C_n z^{n/2} \quad (C_{2m} = C^0_{2m}, \quad C_{2m-1} = iC'_{2m-1}, \quad m=1, 2, \dots) \quad (2 \cdot 127)$$

で与えられる $\zeta_n(z)$ は, 式 (2・122 a) を満たす応力関数である。これが表す応力場, 変位場は式 (2・77), (2・78) より

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \operatorname{Re} \left[i \frac{n}{2} C_n r^{n/2-1} e^{i(n/2-1)\theta} \right] \\ &= \begin{cases} -m C^0_{2m} r^{m-1} \sin(m-1)\theta & (n=2m) \\ -\frac{2m-1}{2} C'_{2m-1} r^{m-1/2} \cos\left(m-\frac{3}{2}\right)\theta & (n=2m-1) \end{cases} \end{aligned} \quad (2 \cdot 128)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \operatorname{Im} \left[i \frac{n}{2} C_n r^{n/2-1} e^{i(n/2-1)\theta} \right] \\ &= \begin{cases} m C^0_{2m} r^{m-1} \cos(m-1)\theta & (n=2m) \\ -\frac{2m-1}{2} C'_{2m-1} r^{m-1/2} \sin\left(m-\frac{3}{2}\right)\theta & (n=2m-1) \end{cases} \end{aligned}$$

$$G u_z = \operatorname{Re} [C_n r^{n/2} e^{i(n/2)\theta}] = \begin{cases} C^0_{2m} r^m \cos m\theta & (n=2m) \\ -C'_{2m-1} r^{m-1/2} \sin\left(m-\frac{1}{2}\right)\theta & (n=2m-1) \end{cases} \quad (2 \cdot 129)$$

である ($m=1, 2, \dots$).

き裂先端近傍の一般的な面外変形では、やはり各 n に対して式 (2・128), (2・129) の重ね合わせが必要で、重ね合わせの係数にあたる C_n はき裂先端近傍の条件から決めることはできない。しかし、各 n に対する r のべき指数は $n=1$ で最小で、それ以後 n の増加とともに $1/2$ ずつ増加する。したがって、き裂先端近傍の応力場、変位場で支配的なものは、 $n=1$ に対するもので

$$C_1' = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} K_{II} \quad (2 \cdot 130)$$

とおけば

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (2 \cdot 131)$$

$$u_z = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2 \cdot 132)$$

である。式 (2・131), (2・132) は単一の直線き裂で無限遠一様荷重の場合の式 (2・108), (2・109) と同じ形をしている。

このように、一般的な面外変形でも、き裂先端近傍の応力場、変位場は同じ形であり、き裂形状、物体形状、荷重条件の相異はすべて応力拡大係数 K_{II} に含まれる。

2・9 応力拡大係数^{17,18,22)}

前節 2・8 で確かめたように、き裂をもつ物体の平面問題においては、き裂先端近傍の応力場 (変位場) が常に基本的な二つのタイプのもの (モード I, II) の重ね合わせになっており、面外変形問題においてはそれが常に同一のタイプのもの (モード III) になっている。これらの基本モードは、き裂先端近傍におけるき裂両縁の独立な相対変位に対応しており、応力場は $f(\theta)/\sqrt{r}$ 、変位場は $g(\theta)\sqrt{r}$ の形をとっている。このような特徴は、き裂両縁が先端近傍では (間隔零の) 外力の作用していない平面になっている。

したがって、変位が

$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = u_z(x, y) \quad (2 \cdot 133)$$

である一般の2次元変位場では、き裂先端近傍の応力場 (変位場) がこれら三つの基本的なタイプの応力場の重ね合わせになっている。すなわち、式 (2・133) の場合、き裂先端近傍では一般に

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta\right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta\right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta\right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta\right) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (2 \cdot 134)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa-1}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa+1}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{\kappa+1}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\kappa}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (2 \cdot 135)$$

が成り立つ。もちろん以上の結論は、き裂先端近傍の応力場・変位場のうちの支配的な部分だけに着目して得られたものである。き裂のより一般的な3次元問題においても、き裂前縁近傍のごく一部分をとってみれば、近似的には上式が当てはまると考えられる。

このように、三つの基本的なタイプの応力場が決まっているので、これらのおのおのの程度含まれているかを示すパラメータである応力拡大係数 K_I, K_{II}, K_{III} の値だけで、き裂先端近傍の応力場を一般的に指定することができる。そして K_I, K_{II}, K_{III} の値は、境界条件、

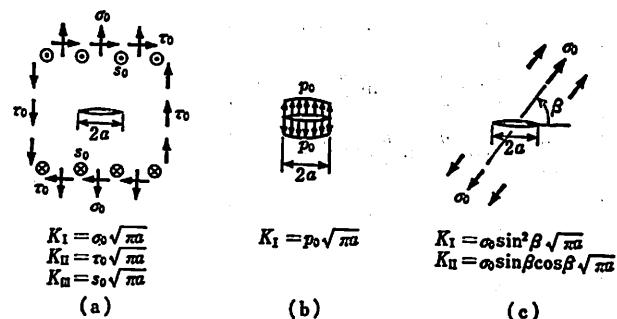


図 2-31 これまでに求めた応力拡大係数

したがって物体形状、き裂形状、負荷条件から決まる。いいかえると応力拡大係数 K_I, K_{II}, K_{III} は、き裂をもつ物体に加えられる外的作用がき裂先端近傍にもたらす力学的效果をすべて含んでいる。したがって、どのような外的作用のもとで破壊が生ずるかを問題にする破壊力学においては、応力拡大係数 K_I, K_{II}, K_{III} が基本的な役割を果たすことが予想できよう。このことは後節 2-13, 2-15 でエネルギー的な立場から説明される。

これまでの例で求まっている基本的な K 値をまとめておく。図 2-31 (a), (b), (c) の零でない K 値は

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau_0 \sqrt{\pi a}, \quad K_{III} = s_0 \sqrt{\pi a} \\ (b) \quad & K_I = p_0 \sqrt{\pi a} \\ (c) \quad & K_I = \sigma_0 \sin^2 \beta \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \sigma_0 \sin \beta \cos \beta \sqrt{\pi a} \end{aligned} \right\} \quad (2-136)$$

である。いずれの場合も無限遠方でき裂に平行な方向の一樣引張り（圧縮）を作用させても K 値に変化はない。次節でさらにいくつかの基本的な場合について K 値を求めることにする。式 (2-134) からわかるように、応力拡大係数 K の次元は

$$[K] = [\text{応力}] \times [\text{長さ}]^{1/2} = [\text{力}] \times [\text{長さ}]^{-1/2}$$

であり、SI 単位系では $[\text{MN}/\text{m}^{3/2}]$ の単位で表される。

2-10 応力関数と応力拡大係数²³⁻²⁵⁾

応力場、変位場が求まっている場合には

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sqrt{2\pi r} (\sigma_y)_{\theta=0} \right] = \frac{2G}{\kappa+1} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_y)_{\theta=\pi} \right] \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sqrt{2\pi r} (\tau_{xy})_{\theta=0} \right] = \frac{2G}{\kappa+1} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_x)_{\theta=\pi} \right] \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sqrt{2\pi r} (\tau_{yz})_{\theta=0} \right] = \frac{G}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sqrt{\frac{2\pi}{r}} (u_z)_{\theta=\pi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2-137)$$

から K 値を求めることができる。これらの関係は、式 (2-134), (2-135) から得られる。なぜなら式 (2-134), (2-135) は、支配的な項のみに注目した近似式であるけれども、そこで無視されている項は上の極限值には全く影響しないからである。上式を応力関数を用いて書き直しておくことと便利である。このためには、既に得られている式 (2-119), (2-130) を利用するのがよい。式 (2-119) の A_1^0, A_1' は、応力関数 $\varphi(z)$ を $\varphi_n(z) = A_n z^{n/2}$ の重ね合わせで表した場合の $\varphi_1 = A_1 z^{1/2}$ の係数の実部、虚部である。したがって

$$A_1^0 + iA_1' = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{z}} \varphi(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 0} [2\sqrt{z} \varphi'(z)]$$

である。これに式 (2-119) を代入すれば

$$K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} [\sqrt{z} \varphi'(z)] \quad (2-138a)$$

となる。同様に式 (2-130) の C_1' は

$$C_1' = -iC_1 = -i \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{z}} \zeta(z) \right] = -i \lim_{z \rightarrow 0} [2\sqrt{z} \zeta'(z)]$$

であるから

$$K_{II} = i\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} [\sqrt{z} \zeta'(z)] \quad (2-139a)$$

となる。

式 (2-73), (2-79) を式 (2-138a), (2-139a) に用いれば、 K 値と応力関数 $Z_I(z), Z_{II}(z), Z_{III}(z)$ の関係

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} [\sqrt{z} [Z_I(z) - iZ_{II}(z)]] \quad (2-138b)$$

$$K_{III} = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} [\sqrt{z} Z_{III}(z)] \quad (2-139b)$$

が得られるが、特に式 (2-138b) は

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} [\sqrt{z} Z_I(z)], \quad K_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} [\sqrt{z} Z_{II}(z)] \quad (2-138c)$$

と書ける。これは式 (2-116) を式 (2-70) に代入すればわかるように $Z_I(z) = A_1^0 z^{-1/2}$, $Z_{II}(z) = -A_1' z^{-1/2}$ となっているためである。以上では、 $z=0$ をき裂の右側先端にとっているが、一般に $z=a$ がき裂の右側先端の場合には

$$\left. \begin{aligned} K_I - iK_{II} &= 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} [\sqrt{z-a} \varphi'(z)] \\ K_{III} &= i\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} [\sqrt{z-a} \zeta'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2-140a)$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} [\sqrt{z-a} Z_I(z)] \\ K_{II} &= \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} [\sqrt{z-a} Z_{II}(z)] \\ K_{III} &= \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} [\sqrt{z-a} Z_{III}(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2-140b)$$

である。式 (2・140) を用いれば、応力関数から直接 K 値を計算することができる。

2・11 応力拡大係数の例¹⁾

〔1〕 き裂上下面に大きさが等しく逆向きの集中力が作用する場合 図 2・32 に示すように、 y 方向の集中力 P 、 $-P$ がき裂上下面に作用している。作用点は、き裂中央 (原点) から b 離れている。これは x 軸に関して対称な問題で、応力関数は

$$Z_1(x) = \frac{P\sqrt{a^2-b^2}}{\pi(x-b)\sqrt{x^2-a^2}} \quad (2 \cdot 141)$$

で与えられる¹⁵⁾。

まず、この $Z_1(x)$ が境界条件を満たしていることを確かめてみよう。無限遠方 $|x| \rightarrow \infty$ では $\sqrt{x^2-a^2} \rightarrow x$ であるから

$$Z_1(x) \simeq \frac{P\sqrt{a^2-b^2}}{\pi x^2}$$

$$Z_1'(x) \simeq -\frac{2P\sqrt{a^2-b^2}}{\pi x^3}$$

となる。したがって、式 (2・71) より

$$|x| \rightarrow \infty \text{ で } \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

である。次に、き裂面 ($y=0$, $-a < x < a$) 上では $\sqrt{x^2-a^2} = \pm i\sqrt{a^2-x^2}$ であり、 $x=b$ を除いて $Z_1(x)$ は純虚数となり

$$y=0, -a < x < a (x \neq b) \text{ で } \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

である。最後に、き裂上面の $x=b$ 点近傍を考える。そのために

$$x-b = \epsilon e^{i\beta} \quad (0 < \beta < \pi)$$

とおき、 $\epsilon \ll b$ として応力関数を $x=b$ 近傍で表すと

$$Z_1(x) \simeq -\frac{iP}{\pi(x-b)} = -\frac{P}{\pi\epsilon} (\sin \beta + i \cos \beta)$$

$$Z_1'(x) \simeq \frac{iP}{\pi(x-b)^2} = \frac{P}{\pi\epsilon^2} (\sin 2\beta + i \cos 2\beta)$$

となる。これらと $y = \epsilon \sin \beta$ を式 (2・71) に代入して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{\pi\epsilon} \sin \beta (1 + \cos 2\beta) \\ \sigma_y &= -\frac{P}{\pi\epsilon} \sin \beta (1 - \cos 2\beta) \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{\pi\epsilon} \sin \beta \sin 2\beta \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 142)$$

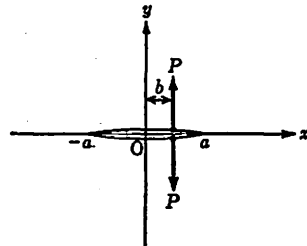


図 2・32 対称な集中引張り力を受けるき裂

となる。図 2・33 のような $x=b$ を中心とする半径 $\epsilon_0 (< b)$ の半円上に作用する内力の合力 P_x, P_y は式 (2・3b) により

$$P_x = \int_0^\pi (\sigma_x \cos \beta + \tau_{xy} \sin \beta) \epsilon_0 d\beta$$

$$P_y = \int_0^\pi (\tau_{yx} \cos \beta + \sigma_y \sin \beta) \epsilon_0 d\beta$$

で与えられる。式 (2・142) を代入して積分すると

$$P_x = 0, \quad P_y = -P$$

となる。したがって、この半円部分には正の向きに大きさ P の外力が作用していることになる。 $\epsilon_0 \rightarrow 0$ とすればこの外力は $x=b$ 点に作用していることがわかる。

以上で式 (2・141) が応力関数であることが確かめられたので、式 (2・140b) を用いてき裂右側先端 $x=a$ での応力拡大係数 $(K_I)_a$ を求めると

$$(K_I)_a = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow a} [\sqrt{x-a} Z_1(x)] = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad (2 \cdot 143a)$$

$$(K_I)_{-a} = -\frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \quad (2 \cdot 143b)$$

である。き裂左側先端での K 値は $(K_I)_a$ で b を $-b$ と置き換えればよいからであり、特に $b=0$ の場合には

$$K_I = (K_I)_a = (K_I)_{-a} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}$$

である。

同様に考えれば、き裂上下面に x 方向の集中力 Q 、 $-Q$ が作用する場合の $Z_2(x)$ 、 $(K_{II})_{\pm a}$ 、および xy 面に垂直方向の集中力 R 、 $-R$ が作用する場合の $Z_3(x)$ 、 $(K_{III})_{\pm a}$ は、式 (2・141)、(2・143) の P をそれぞれ Q 、 R と置き換えたものになる。

【例題 2・4】 図 2・34 に示すように、き裂上下面に x 軸に関して対称な分布外力 $p(x)$ 、 $-p(x)$ (x 軸に沿う単位長さ当たり) が作用している。応力関数および応力拡大係数を求めよ。また、特に $p(x) = p_0$ の場合の K 値が先に求めた式 (2・98) と一致することを確認せよ。

【解】 き裂面上 $x=\xi$ 点で微小長さ $d\xi$ の部分に作用する外力は、上面で $dP = p(\xi)d\xi$ 、下面で $-dP$ である。これらは $x=\xi$ 点に作用する逆向きの集中力と考えることができる。したがって、 dP 、 $-dP$ だけが作用している場合の応力関数、応力拡大係数を dZ_1 、 $(dK_I)_{\pm a}$ とすれば、式 (2・141)、(2・143) より

$$dZ_1 = \frac{p(\xi)d\xi \sqrt{a^2-\xi^2}}{\pi(x-\xi)\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$(dK_I)_a = \frac{p(\xi)d\xi}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}$$

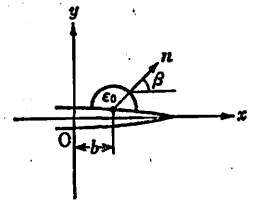


図 2・33 き裂面上に中心をもつ微小半円領域

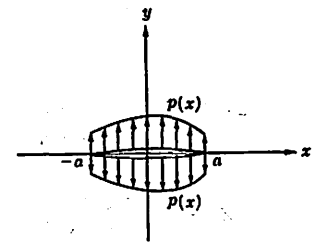


図 2・34 上下面に対称な分布力 $p(x)$ を受けるき裂

$$(dK_I)_{-a} = \frac{p(\xi)d\xi}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}$$

である。 $-a < \xi < a$ に対してこれらを重ね合わせれば求める答をうる。 すなわち

$$\left. \begin{aligned} Z_I(z) &= \int_{-a}^a \frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - a^2}} \left(\frac{p(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi \right) \\ (K_I)_a &= \int (dK_I)_a = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a p(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi \\ (K_I)_{-a} &= \int (dK_I)_{-a} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a p(\xi) \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 144)$$

である。

特に、 $p(\xi) = p_0$ の場合には

$$(K_I)_a = (K_I)_{-a} = \frac{p_0}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi = p_0 \sqrt{\pi a}$$

となり、一様な内圧 p_0 を受けるき裂の場合の式 (2・98) と一致する。

【例題 2・5】 図 2・35 のような半無限体 ($x > 0$) 中の緑き裂の上下面に xy 面に垂直な集中力 R , $-R$ が作用している。この場合の応力関数、応力拡大係数を求めよ。

【解】 無限体中の長さ $2a$ のき裂が同じ集中力 R , $-R$ を受ける場合は式 (2・141), (2・143) で P を R と置き換えればよく

$$Z_{II}(z) = \frac{R \sqrt{a^2 - b^2}}{\pi(z-b) \sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (K_{II})_a = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad (2 \cdot 145)$$

である。この $Z_{II}(z)$ は、半無限体の緑き裂の場合の無限遠とき裂面上の条件を満たしているが、半無限体表面 $x=0$ が自由表面である ($\tau_{xx}=0$) という条件を満たさない。そこで、図 2・36 のように無限体中のき裂の $x=\pm a$ 位置で上下面に R , $-R$ の集中力が作用している場合を考えてみる。この問題は y 軸に関して対称であるから明らかに $x=0$ 面上で $\tau_{xx}=0$ であり、 $x=0$ 面は自由表面と同じである。したがって、この場合の $x>0$ の部分の形状は図 2・35 の半無限体の緑き裂の場合と同じであり、応力関数は、 $z=b$ と $z=-b$ に作用する集中力によるものを重ね合わせて

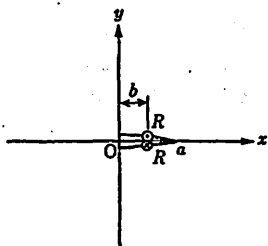


図 2・35 対称な集中面外せん断力 R を受ける半無限体中のき裂

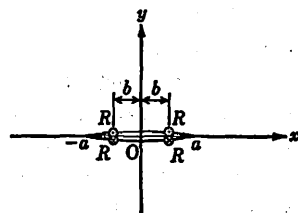


図 2・36 2組の対称な集中面外せん断力 R を受けるき裂

$$Z_{II}(z) = \frac{R \sqrt{a^2 - b^2}}{\pi(z-b) \sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{R \sqrt{a^2 - b^2}}{\pi(z+b) \sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{2R \sqrt{a^2 - b^2} z}{\pi(z^2 - b^2) \sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2 \cdot 146)$$

となる。また、 $z=a$ での応力拡大係数も同様の重ね合わせで求められる。 $z=-b$ に作用する集中力による応力拡大係数も式 (2・145) で b を $-b$ とすればよいから

$$K_{II} = \frac{R}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \frac{R}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{2R}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (2 \cdot 147)$$

である。

〔2〕 一直線上に周期的に並びき裂をもつ無限板が一様荷重を受ける場合 図 2・37 のように、間隔 W で無限個のき裂 (長さ $2a$) が x 軸上に並んでおり、無限遠方で等方引張り応力 σ_0 が作用しているとする。図より $2a/W < 1$ である。応力関数^{11,15)}

$$Z_I(z) = \frac{\sigma_0 \sin(\pi z/W)}{\sqrt{\sin^2(\pi z/W) - \sin^2(\pi a/W)}} \quad (2 \cdot 148)$$

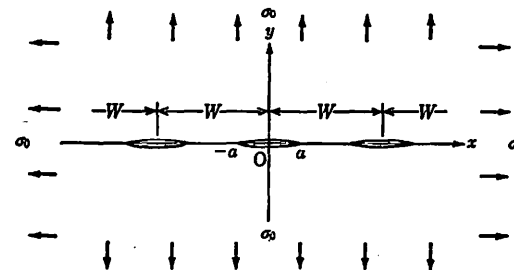


図 2・37 等方引張り応力 σ_0 を受ける周期き裂

が、境界条件を満たすものであることを確かめよう。 $z = \rho e^{i\alpha} = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ($-\pi \leq \alpha \leq \pi$) を

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

に代入すると

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{-\rho \sin \alpha} e^{i\rho \cos \alpha} - e^{\rho \sin \alpha} e^{-i\rho \cos \alpha})$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{-\rho \sin \alpha} e^{i\rho \cos \alpha} + e^{\rho \sin \alpha} e^{-i\rho \cos \alpha})$$

である。したがって、 $|z| \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow \infty$) では $|\sin z|$, $|\cos z| \sim (1/2)e^{\rho|\sin \alpha|} \rightarrow \infty$ である。これに注意すれば、 $|z| \rightarrow \infty$ で

$$Z_I(z) \simeq \frac{\sigma_0 \sin(\pi z/W)}{\sqrt{\sin^2(\pi z/W)}} = \sigma_0$$

$$z Z_I'(z) \simeq -\sigma_0 \left(\sin \frac{\pi a}{W} \right) \left(\frac{-\pi z}{W} \right) \frac{\cos(\pi z/W)}{[\sin^2(\pi z/W)]^{3/2}} \simeq 0$$

となる。したがって、式 (2・71) から

$$|z| \rightarrow \infty \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_0, \quad \tau_{xy} = 0$$

である。次に、 x 軸上を考える。 $\pi a/W < \pi/2$ であるから

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\pi x}{W} - \sin^2 \frac{\pi a}{W}} = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi x}{W} - \sin^2 \frac{\pi a}{W}}$$

となり、これは

$$-\frac{\pi a}{W} + k\pi < \frac{\pi x}{W} < \frac{\pi a}{W} + k\pi \quad (k=0, \pm 1, \dots)$$

すなわち

$$kW - a < x < kW + a \quad (k=0, \pm 1, \dots) \quad (2.149)$$

で純虚数となる。式 (2.149) はき裂面を表しているから、式 (2.71) より

$$\text{き裂面上で } \tau_{xy} = \sigma_y = 0$$

なる境界条件も満たされていることがわかる。

式 (2.140b) を用いて応力拡大係数を計算するために

$$Z_1(z) = \frac{\sigma_0 \sin(\pi z/W)}{\sqrt{\sin[(\pi/W)(z-a)] \sin[(\pi/W)(z+a)]}}$$

と置くと、 $z \rightarrow a$ で

$$\sin\left[\frac{\pi}{W}(z-a)\right] \approx \frac{\pi}{W}(z-a)$$

であるから

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{z-a} \frac{\sigma_0 \sin(\pi z/W)}{\sqrt{\sin[(\pi/W)(z-a)] \sin[(\pi/W)(z+a)]}} \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{\sigma_0 \sin(\pi a/W)}{\sqrt{(\pi/W) \sin(2\pi a/W)}} = \sigma_0 \sqrt{W \tan \frac{\pi a}{W}} \\ &= \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W}} \end{aligned} \quad (2.150)$$

をうる。無限遠方で y 方向の一様引張り応力 σ_0 を受ける場合は、上の解に x 方向の一様圧縮応力場 $\sigma_x = -\sigma_0$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ を重ね合わせればよい。したがって、 K 値は式 (2.150) と同じである。

き裂間隔 W に比べてき裂長さ $2a$ が小さいときは、式 (2.150) を $\pi a/W$ で展開して

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi a}{W} \right)^2 + \dots \right]$$

となる。特に、 $a/W \rightarrow 0$ とすれば、無限板の場合の

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$$

をうる。

無限遠で一様な面内せん断応力 τ_0 、面外せん断応力 s_0 を受ける場合には、式 (2.148)、(2.150) の σ_0 をそれぞれ τ_0 , s_0 と置き換えればよい。特に、モードⅢの場合は

$$Z_{III}(z) = \frac{s_0 \sin(\pi z/W)}{\sqrt{\sin^2(\pi z/W) - \sin^2(\pi a/W)}} \quad (2.151)$$

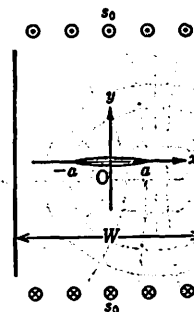


図 2.38 面外せん断応力 s_0 を受ける有限板中の中央き裂

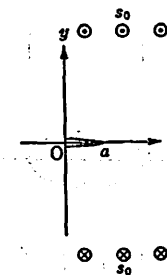


図 2.39 面外せん断応力 s_0 を受ける半無限体中の縁き裂

$$K_{II} = s_0 \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W}} \quad (2.152)$$

である。この場合は、対称性から $x = k(W/2)$ ($k=0, \pm 1, \dots$) 面に作用する応力成分 τ_{xz} は零である。したがって、たとえば図 2.38 のように、幅 W の板が長さ $2a$ の中央き裂をもつ場合、 $x = \pm W/2$ 面が自由表面である ($\tau_{xz} = 0$) という条件も応力関数 (2.151) で満たされている。それゆえに、有限幅の物体中に中央き裂がある場合にもモードⅢの応力拡大係数は式 (2.152) である。これと同じ理由で、図 2.39 に示すように半無限体 ($x \geq 0$) 中に長さ a の縁き裂がある場合、モードⅢの応力拡大係数は式 (2.110) より

$$K_{II} = s_0 \sqrt{\pi a}$$

である。

2.12 応力集中係数と応力拡大係数^{12,15,22)}

切欠きのように物体の形状が変化する個所では、平均的な応力値より大きな応力が生ずる²⁰⁻²²⁾。この場合に生ずる最大応力と適当な基準応力との比が応力集中係数 (stress concentration factor) である²³⁻²⁵⁾。細長い切欠きの先端 (切欠き底) の曲率半径 ρ が零となった極限がき裂に相当する。そして、このような切欠きの応力集中係数が先端の曲率半径 ρ を用いて与えられていれば、これから応力拡大係数を求めることができる。これを楕円孔による応力集中を例にとって調べてみよう。

〔1〕楕円孔による応力集中²⁶⁾ 楕円孔を有する無限板を考え、図 2.40 のように x 軸、 y 軸をとる。これが無限遠方で y 軸方向の一様な引張り応力 σ_0 を受けているとする。この場合楕円孔表面が自由表面であるという条件を xy 座標系で表すのは得策ではない。いま、 $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ として z と ζ の変換関係

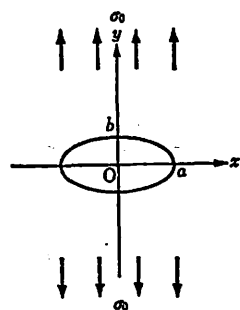


図 2.40 楕円孔を有する板の引張り

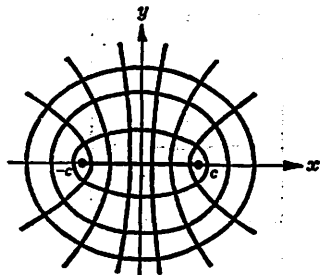


図 2.41 楕円座標系

$$z = c \cosh \zeta \quad (2.153a)$$

を考えると, x, y と ξ, η の変換関係

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad y = c \sinh \xi \sin \eta \quad (2.153b)$$

をうる。これより

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1, \quad \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = 1 \quad (2.153c)$$

となるから $\xi = \text{一定}$ の曲線は楕円で, $\eta = \text{一定}$ の曲線は双曲線であり, いずれも $(\pm c, 0)$ が焦点である (図 2.41)。式 (2.153b) により ξ, η で平面内の点を表すことができるが, このとき, (ξ, η) を楕円座標 (elliptic coordinates) という。楕円座標 (ξ, η) を使うと, 図 2.40 の楕円孔表面は

$$c \cosh \xi_0 = a, \quad c \sinh \xi_0 = b \quad (2.154)$$

から決まる ξ_0 を用いて $\xi = \xi_0$ と表される。さて

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= \frac{dx}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ &= \frac{dx}{d\zeta} \frac{1}{i} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \frac{1}{i} \frac{\partial x}{\partial \eta} = -i \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} = -i \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} + i \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{dz}{d\zeta} = c \sinh \zeta = J e^{i\alpha} \quad (2.155)$$

とおくと

$$e^{i2\alpha} = \frac{\sinh \zeta}{\sinh \xi} \quad (2.156)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = J e^{i\alpha}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} + i \frac{\partial y}{\partial \eta} = i J e^{i\alpha} = J e^{i(\alpha + \pi/2)} \quad (2.157)$$

である。式 (2.157) は, $\eta = \text{一定}$ の双曲線の接線方向の複素ベクトル $[\partial x / \partial \xi + i(\partial y / \partial \xi)]$ が x 軸と角 α をなし, $\xi = \text{一定}$ の楕円の接線方向の複素ベクトル $[\partial x / \partial \eta + i(\partial y / \partial \eta)]$ と直

交していることを表す。したがって, 図 2.42 に示す楕円座標系での応力成分 $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ は, 応力成分の変換則式 (2.10) で $\theta = \alpha$ とおくことにより $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ から求められる。このことと式 (2.52a) を用いると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\eta &= \sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\text{Re}[\varphi'(z)] \\ \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} &= e^{i2\alpha}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) = 2e^{i2\alpha}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2.158)$$

をうる。

Inglis²⁷⁾ は応力関数として

$$\varphi(z) = \frac{\sigma_0 c}{4} (-e^{2\xi_0 - \zeta} + \sinh \zeta) \quad (2.159)$$

$$\psi(z) = -\frac{\sigma_0 c^2}{4} \left[(\cosh 2\xi_0 + 1)\zeta - \frac{1}{4}(e^{2\zeta} + e^{4\xi_0} e^{-2\zeta}) \right]$$

を与えた。上式は $\varphi[x(\zeta)] = \phi(\zeta)$, $\psi[x(\zeta)] = \hat{\psi}(\zeta)$ を与えているので, たとえば $\varphi'(z) = \phi'(\zeta) d\zeta/dx = \phi'(\zeta)/c \sinh \zeta$ である。これに留意して式 (2.158), (2.159) より応力成分を求めると, 境界条件

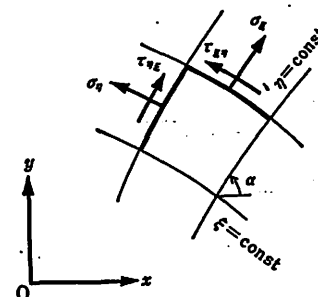
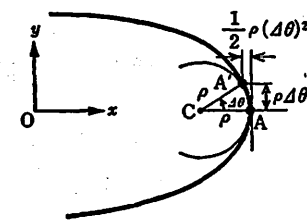


図 2.42 楕円座標系での応力成分

図 2.43 楕円孔先端の曲率半径 ρ

無限遠方 $\xi \rightarrow \infty$ で $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, $\sigma_y = \sigma_0$

楕円孔表面 $\xi = \xi_0$ で $\sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0$

が満たされていることを確かめることができる。その際には無限遠での条件を, 式 (2.156) (2.158) により

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_0, \quad \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = \sigma_0 e^{i2\alpha} = \sigma_0 e^{i2\xi_0} \quad (\xi \rightarrow \infty)$$

と表しておくのがよい。特に楕円孔表面 $\xi = \xi_0$ での σ_η は

$$(\sigma_\eta)_{\xi=\xi_0} = \sigma_0 e^{2\xi_0} \left[\frac{\sinh 2\xi_0 (1 + e^{-2\xi_0})}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta} - 1 \right] \quad (2.160)$$

で与えられ, 長軸端 $\eta = 0, \pi$ で最大値

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad (2.161a)$$

をとる。長軸端 A での曲率中心を C, 曲率半径を ρ とし, A 点にごく近い楕円上の点 A' を

とれば、弧 $\widehat{AA'}$ は中心 C 、半径 ρ の円弧とみなせる。図 2・43 より A' 点の x, y 座標は $a - \rho d\theta(1/2)d\theta$, $\rho d\theta$ であり、これを $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ に代入して

$$\rho = \frac{b^2}{a}, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2 \cdot 162)$$

をうる。したがって応力集中係数 α は

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = 1 + 2\frac{a}{b} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2 \cdot 161b)$$

で与えられる。特に、 $a/b \rightarrow \infty$ すなわち $\rho \rightarrow 0$ は $\xi_0 = 0$ にあたり、楕円が長さ $2c = 2a$ のき裂となり $\alpha \rightarrow \infty$ となる。

〔2〕 応力集中係数と応力拡大係数 上に述べたように図 2・40 で $\rho \rightarrow 0$ とすると、モード I の変形を受ける長さ $2a$ のき裂の場合となる。このときの応力拡大係数 $K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ は応力集中係数 (2・161b) から

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\pi \rho \sigma_0 \alpha} \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\pi \rho \sigma_{\max}} \right]$$

の極限で求めることができる。楕円孔に限らず先端の曲率半径 $\rho \rightarrow 0$ の極限がき裂にあたるような切欠きでは、 ρ が十分小さく同じ値で対応するき裂先端の K 値も同じであれば、切欠き先端近傍の応力場は近似的に同じとなる。したがって、楕円孔の場合に示された上の関係は、先端の曲率半径 $\rho \rightarrow 0$ がき裂にあたるような切欠きに対して一般に成り立つ。モード II, III の場合も同様であり、応力集中係数 α が先端の曲率半径 ρ で表されていれば、これを用いて

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\pi \rho \sigma_{\max}} \right] \\ K_{II} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\sqrt{\pi \rho \tau_{\max}} \right] \\ K_{III} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\sqrt{\pi \rho s_{\max}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 163)$$

から K 値を求めることができる。

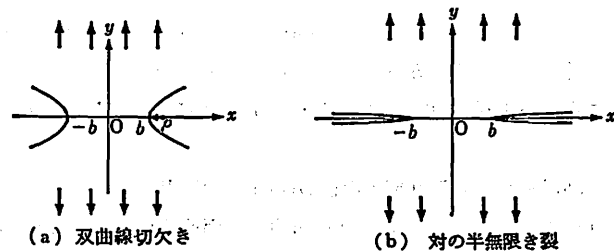


図 2・44 一様引張り応力を受ける切欠き

〔例題 2・6〕 図 2・44 (a) に示す双曲線切欠きをもつ無限板の一様引張りでは、最小断面での平均応力 σ_n に対する応力集中係数が

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} = \frac{2(b/\rho+1)\sqrt{b/\rho}}{(b/\rho+1)\tan^{-1}\sqrt{b/\rho} + \sqrt{b/\rho}} \quad (2 \cdot 164)$$

で与えられる²³⁾。これを利用して、図 2・44 (b) に示す 1 対の半無限き裂が一様引張りを受ける場合の K_I を求めよ。

〔解〕 式 (2・163) により

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{a}{2} \sqrt{\pi \rho} \frac{2(b/\rho+1)\sqrt{b/\rho}}{(b/\rho+1)\tan^{-1}\sqrt{b/\rho} + \sqrt{b/\rho}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_n \sqrt{\pi b} \frac{b/\rho}{(b/\rho)(\pi/2)} = 2\sigma_n \sqrt{\frac{b}{\pi}} \quad (2 \cdot 165)$$

である。

2・13 き裂進展によるエネルギーの解放^{12,29,30)}

き裂先端近傍の応力場 (変位場) が応力拡大係数 K によって指定されるので、き裂の進展が K 値に支配されると考えるのは自然である。そして実際この考えは、き裂進展のエネルギー的 (熱力学的) 考察により裏づけられる。そこで、ここではまずき裂進展に役立つエネルギーがどのようなものであるかを説明し、ついでこのエネルギーを応力拡大係数を用いて表すことにする。

〔1〕 エネルギー解放率 図 2・45 のようなき裂をもつ物体を考える。下端に徐々に荷重を加える場合、線形弾性体では荷重 P と荷重作用点の荷重方向変位 u の間に比例関係

$$P = k(A)u \quad (2 \cdot 166)$$

が成り立つ。き裂面積 A が大きいほど物体は伸びやすいから、物体のばねこわさにあたる $k(A)$ は A の減少関数で $dk(A)/dA < 0$ である。たとえば、き裂面積 A , $A + \Delta A$ ($\Delta A > 0$) に対する荷重 P -変位 u 直線は図 2・46 のようになる。荷重作用点が u だけ変位した状態に

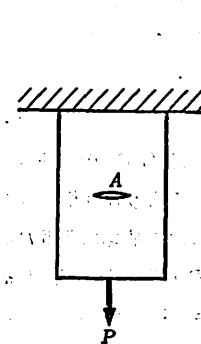


図 2・45 面積 A のき裂をもつ物体

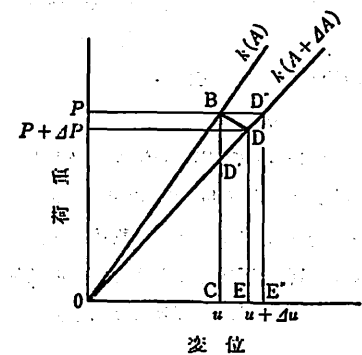


図 2・46 荷重と変位の関係

なるまでに物体は

$$W = \int_0^u P(u') du' = \int_0^u k(A) u' du' = \frac{1}{2} k(A) u^2 \quad (2 \cdot 167)$$

の仕事がされている。弾性体では、この仕事は物体中にひずみエネルギー (strain energy) として貯えられる。したがって、物体のひずみエネルギーを U とすると

$$U = U(u, A) = \frac{1}{2} k(A) u^2 \quad (2 \cdot 168)$$

であり、図 2・46 の三角形 BOC の面積 (以後面積 BOC と書く) にあたる。上式より $\partial U / \partial u = k(A) u$ であり、静的な平衡状態では荷重 P が

$$P = \frac{\partial U(u, A)}{\partial u} \quad (2 \cdot 169)$$

で与えられることになる。

さて、はじめに物体は荷重 P のもとで静的平衡状態にあるとする。したがって、荷重点の変位は u である。この状態のもとで、き裂面積が ΔA 増加して物体が別の静的平衡状態に移り、変位、荷重がそれぞれ Δu , ΔP だけ変化したとする。これは物体の状態が図 2・46 の B 点から、き裂面積 $A + \Delta A$ に対応する直線上の D 点に移ることにあたる。そうすると

$$P + \Delta P = k(A + \Delta A)(u + \Delta u)$$

の関係が成り立つから

$$\Delta P = \frac{dk(A)}{dA} u \Delta A + k(A) \Delta u$$

である。き裂面積が ΔA 増加した状態では、上の関係を満たす荷重と変位の変化 Δu , ΔP が生じているわけである。このような Δu , ΔP の組は無数にあるけれども、実際に生ずる Δu , ΔP は物体に課せられている境界条件によって 1 組に定まる。たとえば、はじめの平衡状態 (荷重 P , 変位 u) において荷重点が変位しないように拘束された場合には $\Delta u = 0$ であり、図 2・46 で B 点から D' 点へ移ることになる。また、荷重点が変位しても荷重は一定に保たれるという場合には $\Delta P = 0$ であり、図 2・46 で B 点から D'' 点へ移ることになる。一般的な境界条件では、

$$\Delta P = k^* \Delta u \quad (2 \cdot 170)$$

であり、図 2・46 の BD の傾きが k^* となる。 $k^* = 0$ が荷重一定 ($\Delta P = 0$) の場合であり、 $k^* \rightarrow \infty$ が変位一定 ($\Delta u = 0$) の場合である。この k^* は荷重がどのような性格のものであるかによってきまる。たとえば、物体の下端にばねを取り付け、ばねの他端に荷重 P を加えたのち、この端点を固定したとする。この状態では、物体は荷重 P を受けその下端が u だけ変位している。取り付けたばねのばねこわさを k_0 とすると、 $\Delta P = -k_0 u$ となるから $k^* = -k_0$ である。

き裂面積が ΔA 増加したことによるひずみエネルギーの変化を ΔU とすると

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= U(u + \Delta u, A + \Delta A) - U(u, A) \\ &= \frac{\partial U(u, A)}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial U(u, A)}{\partial A} \Delta A \\ &= P(u, A) \Delta u + \frac{\partial U(u, A)}{\partial A} \Delta A \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 171)$$

である。上式の右辺第 2 項は、変位一定の境界条件のもとで、き裂が ΔA 進展した場合のひずみエネルギーの変化 $[\Delta U]_{u=\text{const}}$ である。式 (2・168) を使い $dk(A)/dA < 0$ に注意すると

$$[\Delta U]_{u=\text{const}} = \frac{\partial U(u, A)}{\partial A} \Delta A = \frac{1}{2} \frac{dk(A)}{dA} u^2 \Delta A < 0 \quad (\Delta A > 0)$$

である。また、右辺の第 1 項は、き裂が ΔA 進展する間に荷重がなした仕事 ΔW である。したがって、式 (2・171) は

$$\Delta U = \Delta W + [\Delta U]_{u=\text{const}} \quad (2 \cdot 172)$$

$$\left(\begin{aligned} [\Delta U]_{u=\text{const}} &= \frac{\partial U(u, A)}{\partial A} \Delta A < 0 \quad (\Delta A > 0) \\ \Delta W &= P(u, A) \Delta u = P \Delta u \end{aligned} \right)$$

である。

これを図 2・46 で考えてみよう。まず、変位一定の条件の場合 $U(u, A)$ = 面積 BOC, $U(u + \Delta u, A + \Delta A)$ = 面積 D'OC であるから

$$\Delta U = [\Delta U]_{u=\text{const}} = \text{面積 D'OC} - \text{面積 BOC} = -\text{面積 BOD}' < 0$$

となりひずみエネルギーは減少する。また $\Delta W = 0$ であるから式 (2・172) が成り立っている。次に、荷重一定の条件の場合、 $U(u, A)$ = 面積 BOC, $U(u + \Delta u, A + \Delta A)$ = 面積 D''OE' であるから

$$\begin{aligned} \Delta U &= [\Delta U]_{P=\text{const}} = \text{面積 D''OE'} - \text{面積 BOC} = \text{面積 D'CE''D''} - \text{面積 BOD}' \\ &= \text{面積 BCE''D''} - \text{面積 BOD''} = \text{面積 BOD''} \end{aligned}$$

となる。 $\Delta A \rightarrow 0$ で $\text{面積 BOD''} \approx \text{面積 BOD}' = -[\Delta U]_{u=\text{const}}$ に注意すれば

$$\Delta U = [\Delta U]_{P=\text{const}} = -[\Delta U]_{u=\text{const}} > 0$$

となり、ひずみエネルギーは $-[\Delta U]_{u=\text{const}}$ だけ増加する。 $\Delta W = P \Delta u = \text{面積 BCE''D''} = 2 \times \text{面積 BOD''} \approx -2[\Delta U]_{u=\text{const}}$ であるから式 (2・172) は成り立っている。

最後に、一般に式 (2・170) の場合には、 $U(u, A)$ = 面積 BOC, $U(u + \Delta u, A + \Delta A)$ = 面積 DOE から

$$\Delta U = \text{面積 DOE} - \text{面積 BOC} = \text{面積 DD'CE} - \text{面積 BOD}'$$

となるが、面積 BOD' = $-[\Delta U]_{u=\text{const}}$, 面積 DD'CE $\approx$ 面積 BCED $\approx P \Delta u = \Delta W$ であるから、やはり式 (2・172) が成り立っている。この場合 ΔU の正負は k^* の値による。

き裂が ΔA 進展することによってひずみエネルギーは ΔU 変化する。荷重は ΔW の仕事を

する。すなわち、物体に ΔW のエネルギーが与えられる一方、物体内部にひずみエネルギーとして貯えられている分が ΔU 変化する。したがって、物体に与えられるが、物体内のひずみ場に貯えられることのないエネルギー、いいかえれば、荷重と物体内のひずみ場が解放するエネルギー $\Delta \mathcal{E}$ は

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta W - \Delta U = -[\Delta U]_{u=\text{const}} > 0 \quad (2 \cdot 173)$$

である。このエネルギーは、面積 ΔA の新しい面をつくるのに使われることができる。式(2・173)より、き裂面積の微小な増加 ΔA に対する解放エネルギー $\Delta \mathcal{E}$ は、き裂進展のはじめの状態 (P, u, A) のみによって決まり、境界条件にはよらないことがわかる。この値は境界条件によらず $-[\Delta U]_{u=\text{const}}$ と等しいのである。とくに、変位一定の境界条件の場合には、ひずみエネルギーの減少量 $-\Delta U = -[\Delta U]_{u=\text{const}}$ がそのまま解放エネルギー $\Delta \mathcal{E}$ にあたる。しかし、一般の境界条件の場合には、実際に生ずるひずみエネルギーの変化 ΔU は $[\Delta U]_{u=\text{const}}$ と異なるので、 $\Delta \mathcal{E}$ はひずみエネルギーが解放されたものではない。外力 P がポテンシャルをもつ場合を考えよう。これは、荷重 P がポテンシャル $U^* = U^*(u)$ から

$$P = P(u) = -\frac{dU^*(u)}{du} \quad (2 \cdot 174)$$

で与えられる場合であり、式(2・170)の k^* は $k^* = -d^2U^*(u)/du^2$ で与えられる。この場合、荷重と物体をあわせた系の力学的エネルギー

$$U = U(u, A) = U(u, A) + U^*(u) \quad (2 \cdot 175)$$

を系のポテンシャルエネルギー (potential energy) といい、平衡状態では、式(2・169)、(2・174)より $\partial U(u, A)/\partial u = 0$ である。この時には

$$\Delta W - \Delta U = P \Delta u - \Delta U = -\frac{dU^*}{du} \Delta u - \Delta U = -\Delta(U + U^*) = -\Delta U$$

であるから

$$\Delta \mathcal{E} = -\Delta U \quad (2 \cdot 176)$$

となる。すなわち、き裂面積が ΔA 増加すると系のポテンシャルエネルギーは減少し、その減少量 $-\Delta U (> 0)$ が解放エネルギーにあたる。もちろん、この値は変位一定という境界条件のもとでき裂が進展する場合のひずみエネルギーの減少量 $-[\Delta U]_{u=\text{const}}$ と等しい。

き裂面が単位面積増加する際に解放されるエネルギーは

$$g = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta A} \quad (2 \cdot 177)$$

であり、これをエネルギー解放率^{15,16)} (energy release rate) という。 $\Delta \mathcal{E}$ の性格からわかるように、 g もき裂が進展しはじめる状態のみによって決まり境界条件にはよらない。ポテンシャルエネルギー $U(u, A)$ あるいはひずみエネルギー $U(u, A)$ を用いると、式(2・173)、(2・176)により

$$g = -\frac{dU(u, A)}{dA} = -\frac{\partial U(u, A)}{\partial A} \quad (2 \cdot 178)$$

である。 g は単位面積当たりのエネルギーという次元をもつ量で、SI単位系では $[\text{MN/m}]$ の単位で表される。

式(2・168)、(2・178)より

$$g = -\frac{1}{2} \frac{dk(A)}{dA} u^2 = -\frac{dk(A)/dA}{2k(A)^2} P^2 = \frac{P^2}{2} \frac{d}{dA} \left(\frac{1}{k(A)} \right)$$

である。したがって、コンプライアンス (compliance)

$$\lambda(A) = \frac{1}{k(A)} \quad (u = \lambda(A)P)$$

を用いて

$$g = \frac{P^2}{2} \frac{d\lambda(A)}{dA} \quad (2 \cdot 179)$$

から g を計算することもできる。

[2] エネルギー解放率と応力拡大係数 上で説明したように、き裂が微小面積 ΔA 進展するのに役立つ解放エネルギー $g \Delta A$ は、変位拘束という境界条件のもとでき裂が進展した場合のひずみエネルギーの解放分 $-[\Delta U]_{u=\text{const}}$ と同じ値をとる。このひずみエネルギーの変化は、次のようにしてき裂先端近傍の応力場、変位場から計算される。いま、面積 A のき裂がモード I の変形を受け、物体の境界の変位が拘束されているとする。図 2・47 のように、 x, y 軸をとると、き裂先端近傍の $y=0$ 面上に作用している応力成分 σ_y は式(2・134)により

$$\sigma_y(x) = \frac{K_I(A)}{\sqrt{2\pi x}} \quad (2 \cdot 180)$$

である。そこで $y=0$ 面に $x=0$ から $x=\Delta a$ まで切れ目を入れても、この切れ目の上面に単位面積当たり

$$p(x) = -\sigma_y(x) = -\frac{K_I(A)}{\sqrt{2\pi x}} \quad (2 \cdot 181)$$

の分布外力を作用させ、下面に単位面積あたり $-p(x)$ の分布外力を作用させておけば、変

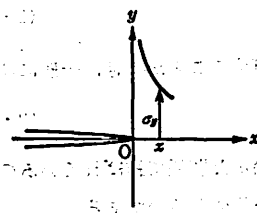


図 2・47 き裂先端を原点とする座標系

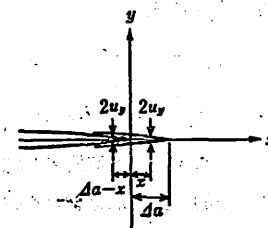


図 2・48 き裂の微小進展

形状は変わらず、したがってひずみエネルギーは変化しないことになる。ただし、切れ目を入れて新しい面を作ったので、表面エネルギーはその分だけ増加している。この分布外力 $p(x)$ 、 $-p(x)$ の大きさを徐々に減らして零にすると、ちょうど最初のき裂が長さ da (面積 dA) 進展した状態となる。この間の上下面の y 方向変位を $u_y(x)$ 、 $-u_y(x)$ とする。図 2・48 に示すようにこれらは、 da だけ進展したき裂面上の先端から $da-x$ 離れた位置での y 方向変位に等しい。 da だけ進展したき裂の応力拡大係数を $K_I(A+da)$ とすると、この変位は式 (2・135) により

$$u_y(x) = \frac{\kappa+1}{2G} K_I(A+da) \sqrt{\frac{da-x}{2\pi}} \approx \frac{\kappa+1}{2G} K_I(A) \sqrt{\frac{da-x}{2\pi}}$$

で与えられる。分布外力 $p(x)$ 、 $-p(x)$ を徐々に零とすることにより、き裂が da だけ進展した状態が得られるので、この際にこれら分布外力のなした仕事が、ひずみエネルギーの変化 dU に等しい (物体の境界では変位が拘束されており外力は仕事をしない)。き裂上面の分布外力 $p(x)$ を零まで減少させるには、たとえば分布外力を $(1-\alpha)p(x)$ と表して α を 0 から 1 まで変化させればよい。 α が 0 から 1 まで変化するにつれて y 方向変位は 0 から $u_y(x)$ まで変化する。線形弾性体であるから、この y 方向変位は分布外力の減小量 $\alpha p(x)$ に比例し、 $\alpha u_y(x)$ と表すことができる。したがって、き裂上面 dx 部分に作用する分布外力が $p(x)dx$ から $0dx$ となる間になす仕事は

$$\begin{aligned} dx \int_0^{u_y(x)} (1-\alpha)p(x) d[\alpha u_y(x)] &= dx p(x) u_y(x) \int_0^1 (1-\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} p(x) u_y(x) dx \\ &= -\frac{(\kappa+1)K_I(A)^2}{8\pi G} \sqrt{\frac{da-x}{x}} dx \end{aligned}$$

で負である。これを $x=0$ から $x=da$ まで積分し、き裂下面についても同様に考えることにより結局

$$[dU]_{u=\text{const}} = -\frac{(\kappa+1)K_I(A)^2}{4\pi G} \int_0^{da} \sqrt{\frac{da-x}{x}} dx = -\frac{\kappa+1}{8G} K_I(A)^2 da \quad (2 \cdot 182)$$

をうる。 $-[dU]_{u=\text{const}}$ が解放エネルギー $g dA$ であるから

$$g = \frac{\kappa+1}{8G} K_I^2 \quad (2 \cdot 183)$$

となる。モード II、III のエネルギー解放率も同様に計算することができ、一般には

$$g = \frac{\kappa+1}{8G} (K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2) + \frac{1}{2G} K_{\sigma}^2 \quad (2 \cdot 184)$$

となる。このようにエネルギー解放率と応力拡大係数とは簡単な関係で結ばれているので、き裂進展のエネルギー的考察に基礎をおく破壊力学で K 値が有用になるのである。

【例題 2・7】 図 2・49 は、半無限き裂をもつ長い帯板を示す。上下面 $y=\pm b$ は y 方向の一様変位 $u_y=\pm v_0$ を受けた後 y 方向の変位を拘束されている。ただし、これらの面上で x 方向の変位は拘束さ

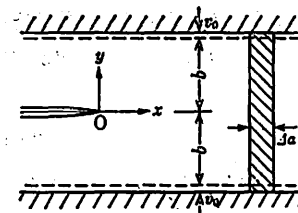


図 2・49 半無限き裂をもつ帯板 (y 方向変位のみ拘束)

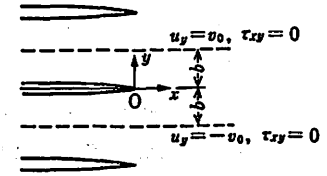


図 2・50 周期半無限き裂をもつ板の引張り

れておらず $\tau_{xy}=0$ となっている。平面応力としてエネルギー解放率 g 、応力拡大係数 K_I を求めよ³¹⁾。

【解】 $x \rightarrow -\infty$ では応力ひずみはすべて零であり、 $x \rightarrow \infty$ では y 方向の一様な単軸応力が生じているから

$$\epsilon_y = \frac{v_0}{b}, \quad \epsilon_x = -\nu \epsilon_y, \quad \sigma_y = E \epsilon_y = E \frac{v_0}{b}$$

である。この場合には、き裂が da 進展すると応力場も da 平行移動する。したがって $x \rightarrow -\infty$ の無応力領域が長さ da だけ増し、 $x \rightarrow \infty$ の一様応力領域が長さ da だけ減る。これからき裂進展によりひずみエネルギーは図 2・49 の斜線部分に貯えられている分だけ減少することになる。この部分は $\sigma_y da$ の荷重を受け $2v_0$ 変位しているからひずみエネルギー $(1/2)\sigma_y da 2v_0 = E(v_0^2/b) da$ をもっている。したがって

$$-dU = E \frac{v_0^2}{b} da$$

となり、これが $g da$ に等しい。式 (2・24)、(2・56)、(2・183) を用いると

$$g = E \frac{v_0^2}{b}, \quad K_I = \frac{E v_0}{\sqrt{b}} \quad (2 \cdot 185)$$

である。この例題は、図 2・50 に示すような平行な半無限き裂をもつ板の引張りの場合³²⁾にあたる。

2・14 J 積分^{30,31)}

き裂進展の際のエネルギー解放率 g は、き裂先端近傍の応力場を定める K 値で表すことができた。ここでは、 g をき裂先端から離れた所における応力場、変位場を用いて表すことを考える。これまで取り扱ってきた2次元の場合に対しては、これはき裂先端を囲む任意の閉曲線に沿う線積分で与えられる。積分経路によらない値を与えるこの線積分は J 積分と呼ばれる。

図 2・51 のように面積 A のき裂をもつ物体が外力のもとで静的平衡にあるとし、変位を u_x, u_y 、応力を $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ とする。変位 a が指定されている境界部分を C_{in} 、表面外力 Q が指定されている境界部分を C_o とし、の境界の外向き法線ベクトルを n とすると

$$\left. \begin{array}{l} C_u \text{ 上で } u_x = a_x, \quad u_y = a_y \\ C_o \text{ 上で } \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = Q_x \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y = Q_y \end{array} \right\} \quad (2 \cdot 186)$$

であり、内部では応力のつり合い式

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0 \end{array} \right\} \quad (2 \cdot 187)$$

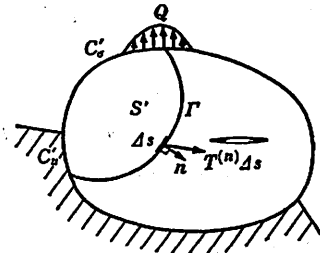


図 2-51 き裂先端を含まない領域

が満たされている。いま、この状態でき裂が微小面積

ΔA 進展して物体が新しい平衡状態に移ったとし、これによる変位の変化を $\Delta u_x, \Delta u_y$ とする。以後物体の単位厚さ当たりの仕事、エネルギーを考えることにして $\Delta A = 1 \times \Delta a$ とする。このとき、き裂先端を含まない任意の領域 S' になされた仕事 $\Delta W'$ は

$$\Delta W' = \int_{C_o'} Q \cdot \Delta u ds + \int_{\Gamma} T^{(n)} \cdot u ds + \int_{S'} F \cdot \Delta u dS$$

である。ここで C_o' 、 Γ は領域 S' の境界の内で C_o に含まれる部分、物体内部にある部分であり、 $T^{(n)}$ は Γ 上に作用する応力ベクトルである。また厚さ 1 の物体を考えればよいから ds は線要素、 dS は面要素である。式 (2-3b)、(2-186) を用いれば

$$\begin{aligned} \Delta W' &= \int_{C_o' + \Gamma} [(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) \Delta u_x + (\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y) \Delta u_y] ds \\ &\quad + \int_{S'} (F_x \Delta u_x + F_y \Delta u_y) dS \\ &= \int_{C_o'} [(\sigma_x \Delta u_x + \tau_{xy} \Delta u_y) n_x + (\tau_{yx} \Delta u_x + \sigma_y \Delta u_y) n_y] ds \\ &\quad + \int_{S'} (F_x \Delta u_x + F_y \Delta u_y) dS \end{aligned}$$

である。ここで C' は領域 S' の全境界である。上式に Gauss の定理を用いると

$$\begin{aligned} \Delta W' &= \int_{S'} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \Delta u_x + \tau_{xy} \Delta u_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} \Delta u_x + \sigma_y \Delta u_y) \right] dS \\ &\quad + \int_{S'} (F_x \Delta u_x + F_y \Delta u_y) dS \\ &= \int_{S'} \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x \right) \Delta u_x + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y \right) \Delta u_y \right. \\ &\quad \left. + \sigma_x \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_x}{\partial y} \right) + \sigma_y \frac{\partial \Delta u_y}{\partial y} \right] dS \end{aligned}$$

となるが、式 (2-187) によって

$$\Delta W' = \int_{S'} \left[\sigma_x \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \Delta u_y}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_x}{\partial y} \right) \right] dS \quad (2 \cdot 188 a)$$

をうる。ひずみの変化量を $\Delta \epsilon_x, \Delta \epsilon_y, \Delta \gamma_{xy}$ とすると

$$\frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} = \Delta \epsilon_x, \quad \frac{\partial \Delta u_y}{\partial y} = \Delta \epsilon_y, \quad \frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_x}{\partial y} = 2 \Delta \gamma_{xy} \quad (2 \cdot 189)$$

であり

$$\Delta W' = \int_{S'} (\sigma_x \Delta \epsilon_x + \sigma_y \Delta \epsilon_y + 2 \tau_{xy} \Delta \gamma_{xy}) dS \quad (2 \cdot 188 b)$$

となる。平面応力の場合の応力-ひずみ関係 (2-31b) を用いると被積分関数は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \Delta \epsilon_x + \sigma_y \Delta \epsilon_y + 2 \tau_{xy} \Delta \gamma_{xy} &= 2G(\epsilon_x \Delta \epsilon_x + \epsilon_y \Delta \epsilon_y + 2 \gamma_{xy} \Delta \gamma_{xy}) \\ &\quad + \frac{2G\nu}{1-\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) \Delta (\epsilon_x + \epsilon_y) \\ &= d \left\{ G \left[\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2 \gamma_{xy}^2 + \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y)^2 \right] \right\} \\ &= d \left[\frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + 2 \tau_{xy} \gamma_{xy}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 190)$$

となる。

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + 2 \tau_{xy} \gamma_{xy}) = G \left[\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2 \gamma_{xy}^2 + \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y)^2 \right] \quad (2 \cdot 191)$$

は、ひずみエネルギー密度 (strain energy density) で、ひずみ $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ を受けている単位体積に貯えられているエネルギーである。平面ひずみの場合には、上式の ν を $\nu/(1-\nu)$ [式 (2-33)] で書き換えればよい。物体全体 S のひずみエネルギー U 、領域 S' のひずみエネルギー U' は

$$U = \int_S U_0 dS, \quad U' = \int_{S'} U_0 dS \quad (2 \cdot 192)$$

である。式 (2-188b)、(2-191)、(2-192) を用いると

$$\Delta W' - \Delta U' = 0$$

となり、き裂先端を含まない任意の領域 S' ではき裂の進展による解放エネルギーは零である。

体積力 F が作用せず、物体表面に作用する外力 Q がポテンシャル力である場合には、外力のポテンシャルエネルギー U^* は

$$U^* = - \int_{C_o} \left(\int^u Q \cdot du \right) ds$$

であり、系全体のポテンシャルエネルギー U は

$$U = U + U^* = \int_S U_0 dS - \int_{C_o} \left(\int^u Q \cdot du \right) ds \quad (2 \cdot 193)$$

である。そしてき裂面積が ΔA 増加したことによる解放エネルギーは式 (2-176) により

$$g \Delta A = - \Delta U = - \int_S \Delta U_0 dS + \int_{C_o} Q \cdot \Delta u ds \quad (2 \cdot 194)$$

である。いま図 2-52 のように進展するき裂先端を含む曲線 Γ をとり、これが囲む領域を S_0 、物体の残りの領域を S' とする。領域 S' は、物体の境界 $C = C_u + C_o$ 。とき裂両面と曲

線 Γ で囲まれており、き裂先端を含まない。したがって、き裂の微小進展 ΔA に対しては

$$-\Delta U' = \Delta W' - \Delta U'$$

$$= \int_{C_0} Q \cdot \Delta u ds + \int_{\Gamma} T^{(n)} \cdot \Delta u ds - \int_{S_0} \Delta U_0 dS = 0 \quad (2 \cdot 195)$$

が成り立つ。これを式 (2・194) に用いると

$$g \Delta A = -\Delta U = - \int_{S_0} \Delta U_0 dS + \oint_{\Gamma} T \cdot \Delta u ds \quad (2 \cdot 196)$$

となる。ただし、 T は境界 Γ 上で領域 S_0 側に作用する応力ベクトルであり、 Γ の領域 S' に対する外向き法線ベクトルを n としているので $T = T^{(-n)} = -T^{(n)}$ である。曲線 Γ はき裂先端を含む任意の曲線でよいから、上式右辺の積分は積分経路 Γ によらず同じ値 $g \Delta A$ をとる。また、き裂面上では $T=0$ であり、 Γ のき裂面上の始点を結んでこれを閉曲線としてよく、 Γ に沿う積分を $\oint_{\Gamma}$ で表している。

き裂先端近傍の応力場、変位場はき裂の微小進展 Δa の前後で同じである。したがって、き裂進展前の先端近傍 (x, y) のひずみエネルギー密度、変位を $U_0(x, y)$, $u(x, y)$ とすれば、き裂進展後これらは $U_0(x - \Delta a, y)$, $u(x - \Delta a, y)$ となり

$$\Delta U_0 = U_0(x - \Delta a, y) - U_0(x, y) = - \frac{\partial U_0(x, y)}{\partial x} \Delta a$$

$$\Delta u = u(x - \Delta a, y) - u(x, y) = - \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Delta a$$

である。 Γ をき裂先端にきわめて近くとれば、上の関係を式 (2・196) に用いることができ

$$g = \int_{S_0} \frac{\partial U_0}{\partial x} dS - \oint_{\Gamma} T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds \quad (2 \cdot 197 a)$$

をうる。 Γ 上で $-n_x ds = dy$ であるから Gauss の定理により

$$\int_{S_0} \frac{\partial U_0}{\partial x} dS = \oint_{\Gamma} U_0 (-n_x) ds = \oint_{\Gamma} U_0 dy$$

となり、式 (2・197) は

$$g = \oint_{\Gamma} \left(U_0 dy - T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \quad (2 \cdot 197 b)$$

と書ける。この右辺の積分

$$J = \oint_{\Gamma} \left(U_0 dy - T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \quad (2 \cdot 198)$$

を J 積分 (J -integral)³⁴⁾ とよぶ。上で説明したように J 積分は、積分経路 Γ がき裂先端を含むものであれば Γ によらない。すなわち、経路に独立な積分 (path-independent integral) である。また、これはき裂進展によるエネルギー解放率 g に等しい。これらの性質により適

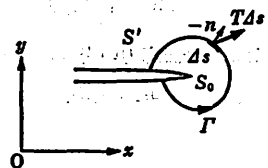


図 2・52 き裂先端を囲む積分経路

当な Γ を選んで J 積分を計算することにより、エネルギー解放率 g を求めることができる。

面外の変位成分 $u_z(x, y) = w(x, y)$ が存在する場合にも式 (2・197), (2・198) は同じ形で、ただ $u = (u_x, u_y, u_z)$ とし、 T を

$$T_x = -(\sigma_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y), \quad T_y = -(\tau_{yx}n_x + \sigma_{yz}n_y), \quad T_z = -(\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y) \quad (2 \cdot 199)$$

とすればよい。式 (2・199) を用い、 Γ に沿って $-n_x ds = dy$, $-n_y ds = -dx$ に注意すれば式 (2・198) を成分を使って

$$J = \oint_{\Gamma} \left[U_0 - \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dy + \left[\tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] dx \right] \quad (2 \cdot 200)$$

と表すことができる。

線形弾性体を考えて得られた J 積分のこれらの性質は一般にひずみエネルギー関数が存在する弾性体に対して成り立つ。また Γ で囲まれる領域 S_0 内で非弾性変形が生じていても、弾性変形のみが生じている領域内で積分経路 Γ を変えることにすれば、 J 積分の値は変化しない。

【例題 2・8】 図 2・53 に示すように、半無限き裂をもつ長い帯板が、側面 $y = \pm b$ に取り付けられた剛体によって y 方向の引張りを受けている。 $y = \pm b$ 面は変位 $u_x = 0$, $u_y = \pm v_0$ を受けた後、変位を拘束されている。平面応力としてエネルギー解放率 g , 応力拡大係数 K_I を求めよ³⁴⁾。

【解】 図 2・53 の ABCDEF を積分経路 Γ にとって J 積分を求める。BC, DE 上では $dy = 0$, $\partial u_x / \partial x = \partial u_y / \partial y = 0$ である。AB, EF は無限遠方にとってあり、応力成分はすべて零で $U_0 = 0$ である。CD 上では $dx = 0$ でやはり無限遠方であるから、 $\sigma_{xx} = 0$ で y 方向には一様なひずみ $\epsilon_y = v_0/b$ が生じている。したがって、式 (2・31b) より応力は

$$\sigma_x = \frac{2G\nu}{1-\nu} \frac{v_0}{b}, \quad \sigma_y = \frac{2G}{1-\nu} \frac{v_0}{b}$$

のみであり、ひずみエネルギー密度は式 (2・191) により

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y = \frac{G}{1-\nu} \left(\frac{v_0}{b} \right)^2$$

となる。以上を式 (2・200) に用いると

$$J = \int_C^D U_0 dy = \int_{-b}^b \frac{G}{1-\nu} \left(\frac{v_0}{b} \right)^2 dy = \frac{2G}{1-\nu} \frac{v_0^2}{b} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{v_0^2}{b}$$

をうる。したがって

$$g = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{v_0^2}{b}, \quad K_I = \frac{E v_0}{\sqrt{(1-\nu^2)b}} \quad (2 \cdot 201)$$

である。

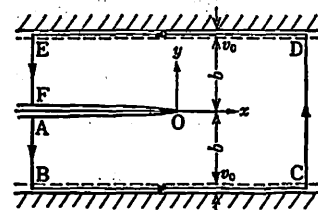


図 2・53 半無限き裂をもつ帯板 (変位拘束)

2・15 破壊の条件式^{15,16)}

ある負荷を受けて静的平衡状態にある系で、き裂が単位面積進展したとすると g なるエネルギーが解放される。エネルギー的に考えると、き裂が進展するためには、このエネルギー解放率 g が単位面積のき裂面をつくるのに必要な仕事量 g_c 以上となる必要がある。したがって、き裂が進展するかどうかの判定規準として

$$g > g_c \quad (2 \cdot 202)$$

を考えることができる^{15,16)}。き裂進展に対する抵抗にあたる g_c がき裂長さによらず一定として、 $K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ の場合を考えてみる。式 (2・183) より

$$g = \frac{\kappa+1}{8G} K_I^2 = \frac{(\kappa+1)}{8G} \pi a \sigma_0^2 \quad (2 \cdot 203)$$

である。図 2・54 は g と a の直線関係を示したもので、負荷応力が大きいほど直線のこう配は大きくなる。図の A 点が負荷応力 σ_0 のもとで条件式 (2・202) を満たすき裂長さ (限界き裂長さ) を与える。負荷応力 σ_0 では、 $a < a_0$ のき裂は進展しえず、 $a > a_0$ のき裂が進展する。そして $a > a_0$ では進展してき裂長さが増加するほど $g - g_c$ は増加し、その結果ますますき裂長さは増加する。したがって、物体中に長さ $2a_0$ の初期き裂があるとする

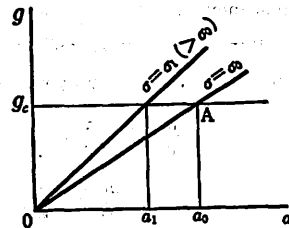


図 2・54 限界き裂長さと限界応力

と、負荷応力が限界応力 σ_0 に達してき裂の進展がはじまると、以後き裂は急速に成長し続け物体が破壊することになる。この場合には、き裂進展の条件 (2・202) 式がすなわち破壊の条件であり、破壊応力 σ_f は

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{8G}{(\kappa+1)\pi a_0}} g_c$$

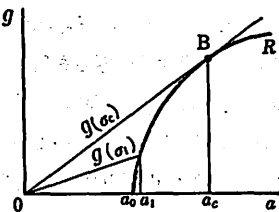
で与えられる。このようなエネルギー的な破壊の条件は、最初 Griffith¹⁶⁾ によって提案されたもので、その後の破壊力学の基盤となっている^{15,16)}。これについては次章で詳しく説明する。 g と K_I との対応から条件 (2・202) は

$$K_I > K_{Ic} \quad (2 \cdot 204)$$

と表すこともできる。 K 値でき裂先端近傍の応力場の指定ができるのであるから、式 (2・204) の形の破壊条件式はそれ自身合理的なものとも考えることもできる。物体が完全に弾性的である場合には、 g と K とが対応づけられるので、エネルギーの考えに基づく条件式 (2・202) もき裂先端近傍の応力場の特性に基づく条件式 (2・204) も同等となる。これは次節 2・16 でふれるき裂先端の小規模降伏の場合にも成り立つ。これらの場合には、線形弾性論

に基づいて得られる g または K で破壊条件を与える方法が有効であり、この立場で破壊現象を取り扱うのが線形破壊力学である。破壊が生ずる g_c , K_{Ic} は破壊靱性 (fracture toughness) と呼ばれる。またエネルギー解放率 g はき裂進展力^{15,16)} (crack extension force) ともいわれる。

き裂の成長とともに単位面積のき裂面を作るに必要な仕事 R が変化する場合には、き裂の安定成長や成長の停止も可能となる。この R をき裂進展抵抗 (crack extension resistance) といい、き裂成長に伴う R の変化を表す曲線を R 曲線という¹⁷⁾。とくに、 $R = g_c$ が図 2・54 の場合に当たっている。たとえば、 R 曲線が図 2・55 の場合には、長さ $2a_0$ の初期き裂は負荷応力の増加とともに成長するが、図の B 点までは

図 2・55 R 曲線¹⁸⁾

$$g - R > 0, \quad \frac{d}{da} (g - R) < 0 \quad (2 \cdot 205 a)$$

であり、負荷の増加を止めればき裂も成長しないという安定成長の領域である。B 点 (g 直線との接点) では

$$g - R = 0, \quad \frac{d}{da} (g - R) = 0, \quad \frac{d^2}{da^2} (g - R) > 0 \quad (2 \cdot 205 b)$$

であり、以後負荷を一定としても図 2・54 の場合と同様に

$$g - R > 0 \quad (2 \cdot 205 c)$$

となり、不安定成長が生じて破壊にいたる。

2・16 き裂先端の小規模降伏^{14,18,19)}

これまで、物体の応力-ひずみ関係として Hooke の法則を用いてきた。しかし、この関係はひずみが小さい場合に成り立つもので、き裂先端近傍のように大きなひずみが生ずる領域では、材料は一般に降伏し、塑性変形が生じている。き裂先端の塑性域がき裂長さに比べて小さい場合を小規模降伏 (small scale yielding) といい、この場合にはき裂先端の塑性変形を特徴づける基本的な量が、弾性き裂に対する K 値と密接な関係をもつと予想される。このことを、き裂先端の塑性域の Dugdale モデル¹⁹⁾に基づ

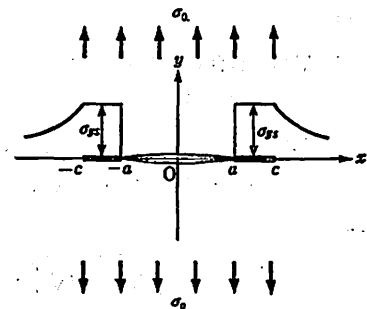


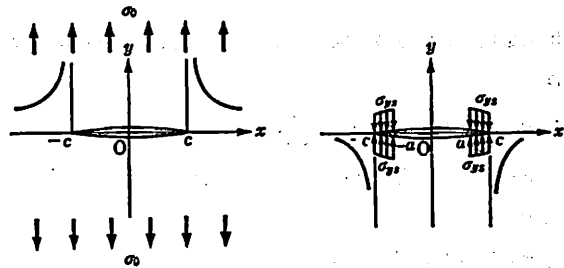
図 2・56 Dugdale モデル

いて考えておく。

このモデルではき裂をもつ板が遠方で一様引張を受ける場合を考える。図2・56のように塑性域がき裂延長線上を進展するとし、塑性域での引張応力が一定値（降伏応力） σ_{ys} であるとする。これは、平面応力の場合にあてはまると考えられる。き裂長さを $2a$ 、先端の塑性域長さを $c-a=d_y$ とすると x 軸上では

$$|x| < a \text{ で } \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 \quad 0 < |x-a| \leq d_y \text{ で } \sigma_y = \sigma_{ys}, \tau_{xy} = 0 \quad (2 \cdot 206)$$

である。塑性域の厚さを零としているので、式(2・206)は、長さ $2c$ のき裂の先端付近 $|x-a| < d_y$ の上下面に y 方向の一様分布力 $-\sigma_{ys}$, σ_{ys} が作用しているという条件と同じである。ただし、式(2・206)では $x = \pm c$ で $\sigma_y = \sigma_{ys}$ であるから、長さ $2c$ のき裂先端では無限遠での引張りによって生ずる応力の特異性が、き裂両面に作用する分布力によって生ずる特異性によって打ち消されているという条件が追加されなければならない。したがって、応力場は図2・57(a), (b)に示すように



(a) 一様引張り応力を受ける場合 (b) 上下面の一部に一様分布力 $\pm\sigma_{ys}$ を受ける場合

図 2・57

(a) 無限遠で一様引張り応力 σ_0 を受ける長さ $2c$ のき裂

(b) $|x-a| < d_y$ で上下面に一様分布力 $-\sigma_{ys}$, σ_{ys} を受ける長さ $2c$ のき裂

の応力場の重ね合わせで与えられ (a), (b) の応力拡大係数 $K_1^{(a)}$, $K_1^{(b)}$ は

$$K_1^{(a)} + K_1^{(b)} = 0 \quad (2 \cdot 207)$$

を満たしている。式(2・136)より $K_1^{(a)} = \sigma_0 \sqrt{\pi c}$ であり、式(2・144)で

$$|x-a| < d_y \text{ で } p = -\sigma_{ys}, \quad |x| < a \text{ で } p = 0$$

とおけば

$$\begin{aligned} K_1^{(b)} &= -\frac{1}{\sqrt{\pi c}} \int_{-c}^{-a} \sigma_{ys} \sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}} d\xi - \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \int_a^c \sigma_{ys} \sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}} d\xi \\ &= -\frac{\sigma_{ys}}{\sqrt{\pi c}} \int_a^c \left(\sqrt{\frac{c-\xi}{c+\xi}} + \sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}} \right) d\xi = -2\sigma_{ys} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \cos^{-1} \left(\frac{a}{c} \right) \end{aligned}$$

である。したがって、式(2・207)は

$$\left. \begin{aligned} K_1^{(a)} + K_1^{(b)} &= \sigma_0 \sqrt{\pi c} - 2\sigma_{ys} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \cos^{-1} \frac{a}{c} = 0 \\ \frac{a}{c} &= \cos \left(\frac{\pi \sigma_0}{2\sigma_{ys}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 208)$$

となる。これは、き裂長さ $2a$ 、引張りの負荷応力 σ_0 が与えられた場合の塑性域長さ $d_y = c-a$ を定める関係である。また、(a) の応力関数 $Z_1^{(a)}(z)$ は式(2・96)であり、(b) の応力関数 $Z_1^{(b)}(z)$ は式(2・144)の p を上と同様において求めることができる。 $Z_1^{(a)}(z)$, $Z_1^{(b)}(z)$ を用いて式(2・72)より、 $x=a$ でのき裂上下面の相対変位 $\delta = 2u_y(a)$ を平面応力に対して求めると

$$\delta = \frac{8\sigma_{ys}a}{\pi E} \log \left(\frac{c}{a} \right) = \frac{8\sigma_{ys}a}{\pi E} \log \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_0}{\sigma_{ys}} \right) \right] \quad (2 \cdot 209)$$

となる¹¹⁾。この δ をき裂先端の開口変位あるいは簡単にき裂開口変位 (crack opening displacement: COD) と呼ぶ。

特に、負荷応力 σ_0 が降伏応力に比べて小さいという場合 $\sigma_0/\sigma_{ys} \ll 1$ が小規模降伏にあたり、式(2・208), (2・209)は

$$\frac{a}{c} = 1 - \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{ys}} \right)^2 + \dots \quad (2 \cdot 210 a)$$

$$\delta = \frac{\pi a \sigma_{ys}}{E} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{ys}} \right)^2 + \dots \quad (2 \cdot 211 a)$$

と近似できる。第1式を塑性域長さ $d_y = c-a$ で表せば

$$d_y = \frac{\pi^2}{8} a \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{ys}} \right)^2 + \dots \quad (2 \cdot 210 b)$$

である。 δ , d_y は、一様負荷応力 σ_0 を受ける長さ $2a$ の弾性き裂の K 値, g 値と降伏応力 σ_{ys} で表すことができる。 $K_1 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$, $g = K_1^2/E$ であるから

$$\delta = \frac{K_1^2}{E\sigma_{ys}} = \frac{g}{\sigma_{ys}} \quad (2 \cdot 211 b)$$

$$d_y = \frac{\pi K_1^2}{8\sigma_{ys}^2} = \frac{\pi E g}{8\sigma_{ys}^2} \quad (2 \cdot 210 c)$$

である。このように、小規模降伏の場合には、き裂先端における基本的な変形量 COD δ と塑性域長さ d_y が弾性き裂の K , g と対応づけられる。したがって、破壊の条件としてしばしば用いられる COD 規準 $\delta = \delta_c$ はこの場合には $K = K_c$, $g = g_c$ と同じである。

[2・1] 図2・58のように半無限き裂の上下面に対称な集中力 P , $-P$ が作用している。式(2・141)

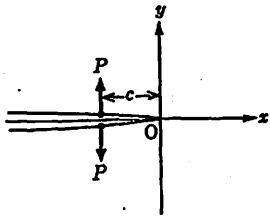


図 2-58

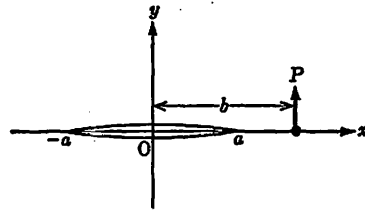


図 2-59

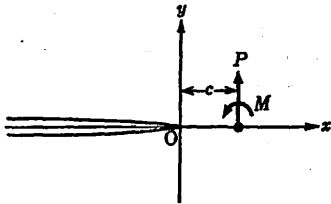


図 2-60

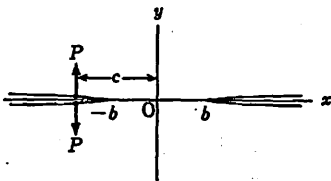


図 2-62

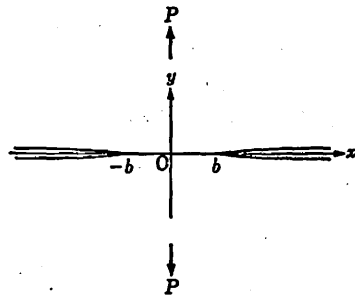


図 2-61

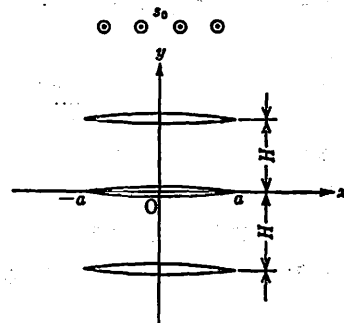


図 2-63

(2-143) を利用して応力関数および応力拡大係数を求めよ。

【2-2】長さ $2a$ の直線き裂をもつ無限板に図 2-59 に示す集中荷重 P が作用している。式 (2-58), (2-144) を利用して、重ね合わせの方法で応力拡大係数を求めよ。

【2-3】【2-2】において集中力 P のかわりに集中モーメント M が作用する場合はどうか。

【2-4】【2-2】、【2-3】の結果を利用して、半無限き裂に図 2-60 の集中力 P および集中モーメント M が作用する場合の応力拡大係数を求めよ。

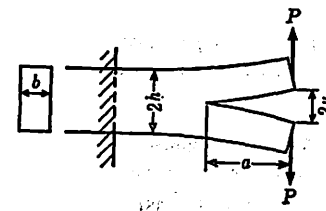


図 2-64

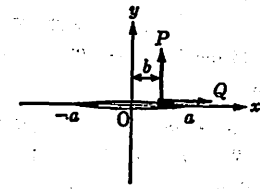


図 2-65

【2-5】一対の半無限き裂が遠方で図 2-61 に示す引張荷重 P を受けている。式 (2-148), (2-150) を利用して応力関数、応力拡大係数を求めよ。

【2-6】一対の半無限き裂の上下面に対称な集中力 P , $-P$ が作用する図 2-62 の場合には応力関数が

$$Z_1 = \frac{P \sqrt{c^2 - b^2}}{\pi(x+c) \sqrt{b^2 - x^2}}$$

で与えられる。応力拡大係数を求めよ。

【2-7】図 2-63 に示す平行な周期き裂群をもつ板が一様な面外せん断応力 s_0 を受ける場合、応力関数は

$$Z_{II} = \frac{s_0 \sinh(\pi x/H)}{[\sinh^2(\pi x/H) - \sinh^2(\pi a/H)]^{1/2}}$$

で与えられる。応力拡大係数を求めよ。

【2-8】図 2-64 に示す二重片持たりの荷重 P と変位 u の関係は材料力学のはりの理論によって近似的に求めることができ

$$2u = \frac{8Pa^3}{Ebh^3}$$

である。エネルギー解放率を求めよ。

【2-9】長さ $2a$ のき裂上面中央から b 離れた位置に集中力 (Q , P) が作用するという図 2-65 の場合には、応力関数 $\varphi(z)$ が

$$\varphi'(z) = \frac{Q+iP}{4\pi} \left[\frac{z-1}{z+1} \frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}} + \frac{1}{b-z} \left(\sqrt{\frac{b^2-a^2}{z^2-a^2}} + 1 \right) \right]$$

で与えられる。応力拡大係数を求めよ。

引用および参考文献

- 1) H. Tada, P. C. Paris, G. R. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation (1973)
- 2) D. P. Rook, D. J. Cartwright, *Compendium of Stress Intensity Factors*, Hillingdon Press (1976)
- 3) 石田 敏, き裂の弾性解析と応力拡大係数, 破壊力学と材料強度講座 2, 培風館 (1976)
- 4) I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity* (2nd ed.), McGraw-Hill (1965)
- 5) 倉西正剛, 弾性学 (第2版), 機械工学講座, III-3, 日本機械学会 (1967)
- 6) N. J. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* (4th

- ed.), Chapters 1~5, Noordhoff (1963)
- 7) 森口繁一, 二次元弾性論, 岩波講座現代応用数学, B 7-a, 岩波書店 (1951)
 - 8) L. M. Milne-Thomson, *Plane Elastic Systems*, Springer-Verlag (1968)
 - 9) 上記 3), 19
 - 10) 岡村弘之, 線形破壊力学入門, 破壊力学と材料強度講座 1, 184, 培風館 (1976)
 - 11) H. M. Westergaard, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 66, 49 (1939)
 - 12) P. C. Paris, G. C. Sih, *Stress Analysis of Cracks, ASTM STP 381*, 30, (1965)
 - 13) I. N. Sneddon, M. Lowengrub, *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, Chapter II, John Wiley & Sons, Inc. (1969)
 - 14) J. F. Knott, *Fundamentals of Fracture Mechanics*, Chapters 3-4, Butterworths, London, (1973)
 - 15) G. R. Irwin, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24, 361 (1957)
 - 16) G. R. Irwin, *Handbuch der Physik*, Bd. 6, "Fracture" 551 (1958)
 - 17) G. C. Sih, H. Liebowitz, ed. by Liebowitz, *Fracture*, II, Chapter 2, Academic Press (1968)
 - 18) 上記 3) 第 2 章
 - 19) 上記 10) 追補
 - 20) M. L. Williams, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24, 109 (1957)
 - 21) G. C. Sih, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 32, 51 (1965)
 - 22) 上記 10) 第 2 章
 - 23) H. Neuber, *Kerbspannungslehre*, Springer-Verlag (1958)
 - 24) R. E. Peterson, *Stress Concentration Design Factors*, Wiley (1953)
 - 25) 西田正孝, 応力集中, 森北出版 (1967)
 - 26) S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity* (3rd ed.), Kogakusha
 - 27) C. E. Inglis, *Trans. Inst. Naval Architect*, 55, 219 (1913)
 - 28) 上記 23), 42
 - 29) 上記 14), Chapter 4
 - 30) 上記 10), 第 4 章
 - 31) J. R. Rice, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 34, 248 (1967)
 - 32) W. T. Koiter, *Problems of Continuum Mechanics* (Muskhelishvili Ann. Vol.), 246, Philadelphia (1961)
 - 33) J. R. Rice, ed. by H. Liebowitz, *Fracture*, II, Chapter 3, Academic Press
 - 34) J. R. Rice, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 35, 379 (1968)
 - 35) 上記 10), 第 7 章
 - 36) A. A. Griffith, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, 221, 163 (1920)
 - 37) J. M. Kraft, A. M. Sullivan, R. W. Boyle, *Proc. Symp. Crack Propagation*, Cranfield 8 (1961)
 - 38) W. F. Brown, J. E. Strawley, *ASTM STP-410*, 11 (1966)
 - 39) 上記 10), 第 5 章
 - 40) D. S. Dugdale, *J. Mech. Phys. Solids*, 8, 100 (1960)
 - 41) F. M. Burdekin, D. E. W. Stone, *J. Strain Anal.*, 1, 145 (1966)

3章 脆性破壊

種々の破壊のうち, 本章で述べる脆性破壊はきわめて危険なもので, 大形構造物をも瞬時に破壊しうるほどの威力をもっている。この破壊は, 主として劈開面に沿って破壊が起こる劈開破壊であって, 古くから脆性破壊の理論として知られている Griffith の理論がある。温度が低下すると, それまでは延性的挙動を呈していた材料が急に脆性的挙動を示して, 脆性破壊しやすくなる延性-脆性遷移も見逃せない現象である。また, 脆性破壊を生じやすいか否かを判断するパラメータである破壊靱性は, 材料選定の有力な手段となる。さらに, 脆性破壊防止の設計法も設計者としては是非とも心得ておかねばならない。

3・1 劈開破壊

劈開破壊 (cleavage fracture) は体心立方格子 (bcc) や稠密立方格子 (hcp) などの材料[†]に起こり, 特定の格子面に沿って生じる分離破壊である。そしてこの特定の格子面を劈開面 (cleavage plane) というが, 劈開破壊は劈開面に垂直に働く垂直応力成分 σ によって生じるものである。表 3・1 に各種の結晶の劈開面を示す。この表のように劈開面はいずれも低指数面となっているが, このことについては次節で説明する。

劈開破面は通常平坦で, 光をあてると輝いて見える。図 3・1 は, ドライアイスの温度で衝撃によって破壊された鉄の劈開破面である。図 3・2 は各結晶粒を横切って劈開破壊が伝播する模様を示しており, 隣接する結晶は互いに方位を異にするので, 劈開面の方向は結晶ご

表 3・1 各種の結晶の劈開面

結 晶	例	劈開面
b c c	Fe, Cr, Mn, Mo, W, V, Ta, Li など	(100)
h c p	Zn, Mg, Sn, Be, Cd など	(0001)
ダイヤモンド	ダイヤモンド, Si, Ge	(111)
岩 塩	NaCl, KCl, LiF, MgO	(100)

[†] 面心立方格子 (fcc) の材料には劈開破壊を生じないが, これはせん断応力によるすべり変形が容易に起こるからである。

6 章 非線形破壊力学の理論

本章では、材料に大規模降伏あるいは全断面降伏が生じたのちに破壊する場合を対象とした、いわゆる非線形破壊力学について述べる。まず、き裂あるいは切欠き材のき裂先端近傍の塑性応力・ひずみの近似解法を述べた後、それを破壊の条件と組み合わせることによって、弾塑性挙動を示す材料の静的破壊強度がどのように解析的に示されるかについて述べる。

6・1 非線形破壊力学の特徴

非線形破壊力学で問題とする事柄は、き裂材あるいは切欠き材の応力集中部における塑性変形が広域におよび、そこでの応力や変形量あるいは変形域などの力学量が材料のそれらの限界値に達したときにき裂が発生し、また成長することを解析的に示すことである。このような広域の降伏を大規模降伏 (large scale yielding) と呼び、小規模降伏と区別する。また、ここでの非線形性 (non-linearity) とは、表 6・1 に示すように、材料 (応力-ひずみ関係) と幾何学的関係 (ひずみ-変位関係) のそれぞれの線形性と非線形性の組合せのうち、応力-ひずみ関係の非線形性と、ひずみが変位の座標による一回微分の線形式で表される、いわゆる幾何学的線形性とを組み合わせたものをいう。破壊に関与する材料部分が全断面におよぶ場合も取り扱うが、この場合はき裂先端近傍の力学量だけではなく、全断面の応力あるいは変形量も破壊を支配する重要な力学量になる。

非線形破壊力学の理論は、今までのところ十分に研究し尽されたものではなく、研究途上にあるものが少なくない。それは線形破壊力学の理論に比べて少なくとも次の三点で大きな困難があることに原因している。一つは、応力集中部の塑性変形をできるだけ正しく計算す

表 6・1 非線形破壊力学における非線形性の意味

幾何学	材 料	
	線 形 性	非 線 形 性
線 形 性 (微小ひずみ)	線形弾性(き裂)	弾塑性(き裂)
非 線 形 性 (有限ひずみ)	大 た わ み	延 性 破 壊

必要があるが、塑性変形がもともと履歴の影響を受けるので、このことを考慮すれば非常に数学的困難を伴うことである[†]。二つには、同一の破壊モードであっても、塑性変形開始の条件、すなわち降伏条件の違いによってき裂近傍の塑性変形量が異なることである。三つには、破壊条件の違いによって破壊強度が異なり、いかなる破壊条件が実験結果に照らして適切であるかについて、データの不足もあって必ずしもさだかでないことである。これらの点は線形破壊力学と基本的に異なる点であり、とりわけ最後の点は、脆性材料などの弾性破壊において採用する破壊クライテリアが異なっても、破壊力学レベルの破壊強度は変わらないこと（2章の2・16節参照）と対照的である。き裂先端の弾塑性応力・ひずみの計算は一般的にいて数学的困難を伴うことが多いので、比較的研究成果の定着していることもあって、ここでは塑性平面ひずみ状態のすべり線場の理論と J 積分を足掛かりとして述べることにする。ただし、対象材料は均質かつ等方性であり、またひずみ速度依存性はないとしておく。

6・2 単純引張りを受けるき裂材の塑性応力・ひずみの近似解法

〔1〕 応力-ひずみ曲線、降伏条件式、応力-ひずみ関係式 金属材料を静的に引張ると一般に図 6・1 の点 A に示すような降伏点が見れる。静的引張降伏応力 σ_{ys} 以上の応力を加えると、応力-ひずみ曲線は ABC のように単調に増加する。もし、点 B の状態から除荷すると弾性直線 OA に平行な直線 BD に沿って点 D に至る。除荷によって、全ひずみ OE のうち弾性ひずみ DE だけ消失して、塑性ひずみ OD が残る。点 D から再負荷すると、除荷中に材質的变化（ひずみ時効など）がないかぎり、DBC の経路をたどり、点 B での降伏

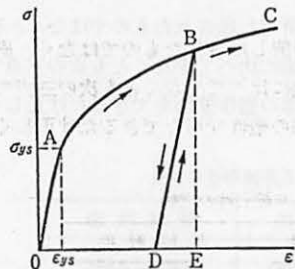


図 6・1 静的引張応力-ひずみ線図

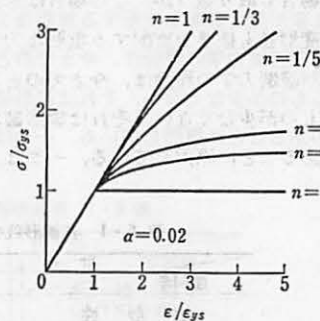


図 6・2 無次元化した引張応力-ひずみ線図¹⁾

[†] 増分ひずみをひずみ履歴に沿って積分する、いわゆるひずみ増分理論を必要とするが、以下では履歴を考えない全ひずみ理論を用いる。

応力は明らかに初期降伏応力 σ_{ys} より大きくなる。これをひずみ硬化あるいは加工硬化という。力学的取扱いのうえから応力-ひずみ曲線を単純化して、たとえば応力とひずみをそれぞれ基準値 σ_0 および ε_0 で無次元化して

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{1/n} \quad (\alpha, n: \text{定数}) \quad (6 \cdot 1)$$

のように表す。ここで、 n はひずみ硬化指数あるいは加工硬化指数と呼ばれる。また、 σ_0 および ε_0 にはそれぞれ σ_{ys} および $\varepsilon_{ys} = \sigma_{ys}/E$ がよく用いられる。図 6・2¹⁾ は、 $\alpha = 0.02$ とおいて、いくつかの n の値について示した応力-ひずみ曲線の例である。特別の場合として、 $n=1$ のときは線形弾性 (linear elasticity) を、 $n=0$ のときは弾完全塑性 (elastic-perfect plasticity) を表す。また、弾完全塑性で $E \rightarrow \infty$ (弾性ひずみ零) とおいたものを剛完全塑性 (rigid-perfect plasticity) という。

き裂材や切欠き材に単純引張りを負荷しても、応力集中部では応力は多軸状態になる。これらの応力がどのような値に達すれば塑性変形が始まるかという力学的条件を、降伏条件 (yield condition) という。金属材料の降伏条件として重要なものは Tresca の条件と Mises の条件の二つである。前者の条件は、最大せん断応力値が材料のせん断降伏応力 τ_{ys} に等しくなったとき降伏が起るとするもので次式で与えられる。

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = 2\tau_{ys}, \quad |\sigma_2 - \sigma_3| = 2\tau_{ys}, \quad |\sigma_3 - \sigma_1| = 2\tau_{ys} \quad (6 \cdot 2)$$

ここで、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は主応力である。この条件では、 $2\tau_{ys} = \sigma_{ys}$ の関係が成り立つ (単純引張りでは、 $\sigma_1 = \sigma_{ys}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) 他方、後者の条件は

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6\tau_{ys}^2 = 2\sigma_{ys}^2 \quad (6 \cdot 3)$$

で与えられる。この条件では、 $2\tau_{ys} = 2\sigma_{ys}/\sqrt{3} \approx 1.155\sigma_{ys}$ の関係が成り立つ。

塑性ひずみ成分 (上つきの添字 p をつける) は、全ひずみ成分から弾性ひずみ成分 (上つきの添字 e をつける) を差し引いて次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^p &= \varepsilon_x' - \varepsilon_x^e = \varepsilon_x' - (\sigma_x'/2G) \quad \text{など}^\dagger \\ \gamma_{xy}^p/2 &= (\gamma_{xy}/2) - (\gamma_{xy}^e/2) = (\gamma_{xy}/2) - (\tau_{xy}/2G) \quad \text{など} \end{aligned} \right\} \quad (6 \cdot 4)$$

ここで、 ε_x' などは全偏差ひずみ成分 (ダッシュをつける) を表し、全ひずみ成分から平均垂直ひずみ $\varepsilon_m = (1-2\nu)\sigma_m/E$ を差し引いて定義される。ただし、 σ_m は平均垂直応力で、 $\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ である。同様に、 σ_x' などは偏差応力 (ダッシュをつける) を表し、 σ_x などから σ_m を差し引いたものとして定義される。また、塑性ひずみエネルギー U^p は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U^p &= \sigma_x \varepsilon_x^p + \sigma_y \varepsilon_y^p + \sigma_z \varepsilon_z^p + \tau_{yz} \gamma_{yz}^p + \tau_{zx} \gamma_{zx}^p + \tau_{xy} \gamma_{xy}^p \\ &= \sigma_x' \varepsilon_x^p + \sigma_y' \varepsilon_y^p + \sigma_z' \varepsilon_z^p + \tau_{yz} \gamma_{yz}^p + \tau_{zx} \gamma_{zx}^p + \tau_{xy} \gamma_{xy}^p \end{aligned} \quad (6 \cdot 5)$$

[†] $\varepsilon_x^p = \varepsilon_x - \varepsilon_x^e = \varepsilon_x' + \varepsilon_m - \varepsilon_x^e = \varepsilon_x' - (\varepsilon_x^e - \varepsilon_m) = \varepsilon_x' - \varepsilon_x^e$

ここで、塑性変形により体積は変わらないこと（非圧縮性， $\epsilon_x^p + \epsilon_y^p + \epsilon_z^p = 0$ ）を用いた。さらに、多軸応力状態のものを単軸引張応力のものに換算した相当応力 σ_e および相当塑性ひずみ ϵ_e^p は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)]^{1/2} \\ \epsilon_e^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} [(\epsilon_x^p - \epsilon_y^p)^2 + (\epsilon_y^p - \epsilon_z^p)^2 + (\epsilon_z^p - \epsilon_x^p)^2 + 6(\gamma_{yz}^p{}^2 + \gamma_{zx}^p{}^2 + \gamma_{xy}^p{}^2)]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

したがって

$$U^p = \sigma_e \epsilon_e^p$$

となる。

多軸応力状態における応力-ひずみ関係を求めるために、応力と塑性ひずみ増分との間に次式に示す流れ法則（flow-rule）が成り立つものとする。 *DE: 変位増分のひずみ増分*

$$\frac{d\epsilon_x^p}{d\sigma_e} = \frac{d\epsilon_y^p}{d\sigma_e} = \frac{d\epsilon_z^p}{d\sigma_e} = \frac{d(\gamma_{yz}^p/2)}{d\tau_{yz}} = \frac{d(\gamma_{zx}^p/2)}{d\tau_{zx}} = \frac{d(\gamma_{xy}^p/2)}{d\tau_{xy}} = \lambda \quad (6.7)$$

ここで、 $d\epsilon_x^p$ などを ϵ_x^e などに、 λ を $1/(2G)$ に置き換えると、上式は線形弾性体に対する Hooke の法則と一致する。また、 λ は正值の比例係数で、式 (6.6) を用いて

$$\lambda = (3/2)(d\epsilon_e^p/d\sigma_e) = (3/2)(dV^p/d\sigma_e^2)$$

となる。したがって、式 (6.7) より全偏差ひずみ増分の各成分は次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x^e &= \frac{d\sigma_x^e}{2G} + \sigma_x^e \lambda = \frac{d\sigma_x^e}{2G} + \frac{3\sigma_x^e d\epsilon_e^p}{2\sigma_e} \quad \text{など} \\ \frac{d\gamma_{xy}^e}{2} &= \frac{d\tau_{xy}^e}{2G} + \tau_{xy}^e \lambda = \frac{d\tau_{xy}^e}{2G} + \frac{3\tau_{xy}^e d\epsilon_e^p}{2\sigma_e} \quad \text{など} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

この式はひずみ硬化材に対する Reuss の式と呼ばれる。剛完全塑性体の場合、式 (6.8) は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x^e &= \sigma_x^e \lambda = \frac{3\sigma_x^e d\epsilon_e^e}{2\sigma_e} \quad \text{など} \\ \frac{d\gamma_{xy}^e}{2} &= \tau_{xy}^e \lambda = \frac{3\tau_{xy}^e d\epsilon_e^e}{2\sigma_e} \quad \text{など} \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

ここで、 $G \rightarrow \infty$ とすると体積変化もなく、 $d\epsilon_x^e = d\epsilon_x^p$ などとなるから、上式ではひずみ増分のダッシュも添字 p もはずしてある。上式を Levy-Mises の式という。

〔2〕 塑性平面ひずみにおけるすべり線場 塑性平面ひずみ状態では、 x, y, z 方向の変位速度成分 v_x, v_y, v_z のうち、 $v_z = 0$ であるから、ひずみ速度の定義式（幾何学的線形性）

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

より、 $\dot{\epsilon}_x = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0$ となり結局、非圧縮性を用いて、 $\dot{\epsilon}_y = -\dot{\epsilon}_x$ となる。したがって、 $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z$ はそれぞれ主ひずみ速度で、そのうちの二つは零となり、塑性平面ひずみ状態は明らかに純せん断変形[†]であることがわかる（図 6.3）。式 (6.7) より、図 6.3 (a) の Mohr のひずみ速度円に相似な関係にある Mohr の応力円は図 6.4 (a) のようになる。ここで、式 (6.9) より $\dot{\epsilon}_z = \sigma_z^e \lambda = 0$ 、したがって、 $\sigma_z = \sigma_3 = (1/2)(\sigma_x + \sigma_y)$ となるから、 $\sigma_m = -p = (1/2)(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_3$ となる。 p は静水圧応力であり慣習上負号を付けた。また、 $\sigma_z = (1/2)(\sigma_x + \sigma_y)$ の関係式を用いると、式 (6.7) は次式のようになる。

$$\frac{\dot{\epsilon}_x}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{4\tau_{xy}} = \frac{\lambda}{2} \quad (6.11)$$

図 6.4 (a) の PX の大きさ、すなわちせん断応力 k の大きさは、 $\sigma_z = (1/2)(\sigma_x + \sigma_y)$ を

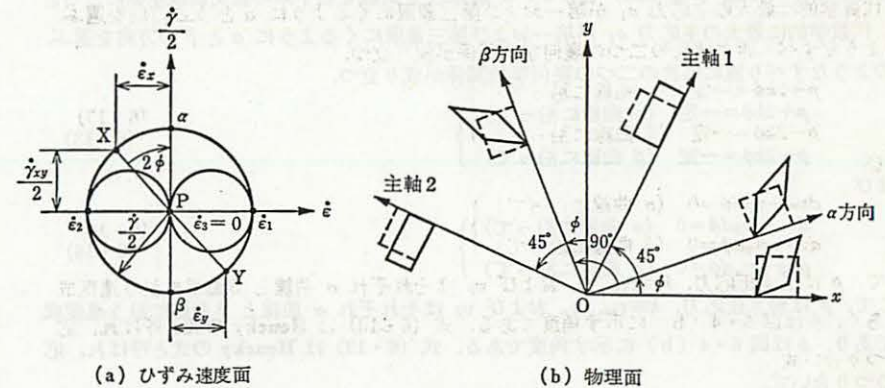


図 6.3 Mohr のひずみ速度円と対応する物理面（すべり線 α, β に沿う伸び速度は零）

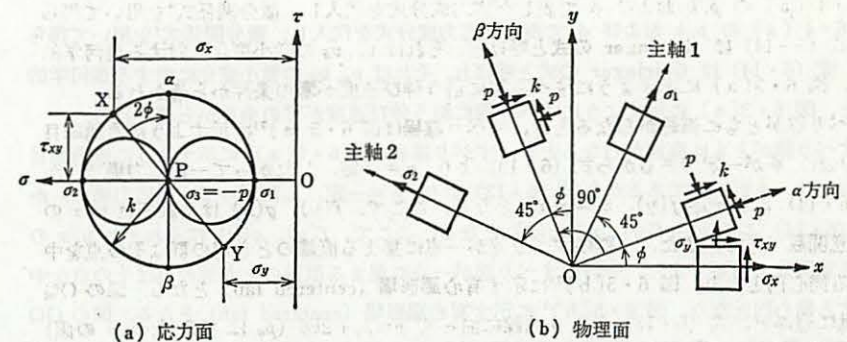


図 6.4 Mohr の応力円と対応する物理面

[†] 物体全体としての回転を含まない純せん断変形において、一つの主軸方向の伸縮がなく、全体として体積変化のないような変形をいう。

Mises の降伏条件式 (6・3) に代入すると τ_{yz} となり

$$k^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = (\tau_{yz})^2 \quad (6 \cdot 12)$$

で表される。Tresca の条件式 (6・2) では、 $k = \tau_{yz}$ となってやはり式 (6・12) となる。すなわち、剛完全塑性体の平面ひずみ状態では両降伏条件式は同形となり、 τ_{yz} と σ_{yz} との関係式が異なるのみである。

さて、図 6・3 (a) と図 6・4 (a) の対応から最大せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}_{\max} \equiv \dot{\gamma}$ の方向と最大せん断応力 $\tau_{\max} = k \equiv \tau_{yz}$ の方向、すなわち α の方向はともに一致する。塑性平面ひずみ状態にある物体の各点において、これらの方向と一致するような方向をもつ直交曲線群 α および β をすべり線 (slip line) とよび、 α 曲線と β 曲線を右手系の直交曲線座標にとるとき、代数的に最大の主応力 σ_1 が第一および第三象限にくるように α と β の方向を選ぶ。このようなすべり線には次の二つの幾何学的関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} p + 2k\phi &= \text{一定} \quad (\alpha \text{ 曲線に沿って}) \\ p - 2k\phi &= \text{一定} \quad (\beta \text{ 曲線に沿って}) \end{aligned} \right\} \quad (6 \cdot 13)$$

および

$$\left. \begin{aligned} dv_\alpha - v_\beta d\phi &= 0 \quad (\alpha \text{ 曲線に沿って}) \\ dv_\beta + v_\alpha d\phi &= 0 \quad (\beta \text{ 曲線に沿って}) \end{aligned} \right\} \quad (6 \cdot 14)$$

ここで、 p は静水圧応力、 $k \equiv \tau_{yz}$ 、 v_α および v_β はそれぞれ α 曲線と β 曲線に沿う速度成分であり、 ϕ は図 6・4 (b) に示す角度である。式 (6・13) は Hencky の式と呼ばれ、応力のつり合い式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (6 \cdot 15)$$

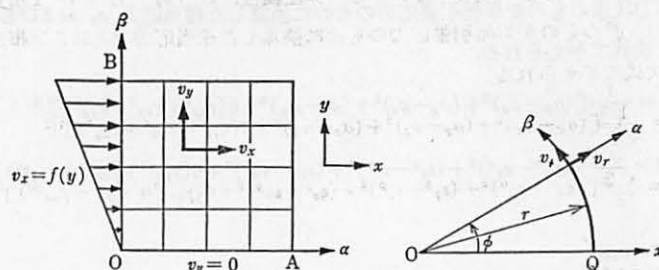
に図 6・4 (a) の p, k および ϕ で表した応力成分式を代入し、微分関係式†を用いて得られる。式 (6・14) は Geiringer の式と呼ばれ、それは v_α, v_β の微小変化に対する幾何学的関係と、図 6・3 (a) に示すようにすべり線に沿う伸び速度が零の条件から導かれる。

両すべり線がともに直線からなるとき、すべり線場は図 6・5 (a)†に示すように直角網目でおおわれ、 ϕ が一定であるから式 (6・13) より $p = \text{一定}$ 、したがって一定応力場で、かつ式 (6・14) より $v_x = f(y)$ 、 $v_y = g(x)$ となる。ここで、 $f(y)$ 、 $g(x)$ はそれぞれ y, x のみの任意関数である。また、一群のすべり線が一点に集まる直線のとき他の群はその点を中心とする同心円となり、図 6・5 (b)†に示す有心扇形場 (centered fan) となる。図の OQ を x 軸に選ぶと、式 (6・13) より β 曲線に沿って $p = p_0 + 2k\phi$ (p_0 は OQ 上の p の値)

† たとえば α 方向への微分は、 x および y 方向への微分を用いて

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}$$

となる。



(a) 直線すべり線場 (OA 上で $v_y = 0$, OB 上で $v_x = f(y)$ が直線分布のとき、変形は単純せん断変形となる)

(b) 有心扇形場

図 6・5 基本的なすべり線場の例†

となる。したがって、円柱座標 (r, ϕ) で表した応力成分 σ_r, σ_ϕ は、ともにすべり線方向の応力成分であるので、図 6・4 (a) を参照して次式のようになる。

$$\sigma_r = \sigma_\phi = -p = -p_0 - 2k\phi, \quad \tau_{r\phi} = k = \text{一定} \quad (6 \cdot 16)$$

有心扇形場の中心では、 ϕ はいかなる値をもとりうるから、式 (6・16) の第 1 式より、 σ_r と σ_ϕ は不定となり、この点は応力の特異点であることがわかる。このことは速度についてもいえる。速度については、 $v_\alpha = v_r$ 、 $v_\beta = v_\phi$ とおくと式 (6・14) より α 曲線に沿って $dv_r = 0$ 、 β 曲線に沿って $dv_\phi = -v_r d\phi$ となるから、積分して

$$v_r = f'(\phi), \quad v_\phi = -f(\phi) + g(r) \quad (6 \cdot 17)$$

となる。ここで $f'(\phi)$ は ϕ のみの任意関数 $f(\phi)$ の ϕ に関する 1 回微分を表し、 $g(r)$ は r のみの任意関数である。すべり線場の具体例は以下で説明する。

〔3〕 剛完全塑性体の初期降伏点荷重 剛完全塑性体に外力を増加していくと一般に変形する塑性域と剛性域ができる。前者は、変形が可能となった瞬間に実際に塑性変形を生ずる領域をいい、このような変形が可能となり始めるときの荷重を、剛完全塑性体の初期降伏点荷重 (initial yield point load) という。また、この瞬間に変形が零にとどまっている領域が後者の剛性域であり、それは応力が σ_{ys} に達しない純剛性域と、応力は σ_{ys} に達しているが、まわりの純剛性域の拘束を受けて変形が零の領域の二つを含んでいる。以下で剛塑性境界とは、剛性域と変形する塑性域との境界を表すものとする。この境界では速度の接線成分が不連続となるので、式 (6・10) の第 6 式より $\dot{\gamma}_{xy} \rightarrow \infty$ となり、これを式 (6・11) に代入すると $\sigma_x = \sigma_y$ となる。したがって、図 6・4 (a) から明らかなように速度の不連続線はすべり線となる†。

初期降伏点荷重を求めるには、まず変形する塑性域において応力の境界条件を満足するよ

† 応力の不連続線はすべり線とは一致しない。したがって、応力の不連続線と速度の不連続線とは一致しない。

うにすべり線場を組み立て（したがって、それは応力のつり合い式と降伏条件を満足している）、その領域内で速度の境界条件を満足するようにすべり線場による速度分布を求める（したがって、応力-ひずみ関係を満足している）。このようにして得られた解を正解といい、さらにこの解を変形域に隣接する剛性域に拡張した場合、つり合い式を満足しかつ降伏条件を破らないような応力分布がその剛性域に存在することを明らかにして、はじめてその解は完全解（complete solution）となる。

図 6・6²⁻⁴⁾ は剛完全塑性の半無限体に、完全に潤滑された摩擦のない平らな剛体ポンチを押し込む場合[†]を、塑性平面ひずみ問題として解いた Hill らによる初期の解を示す。図の

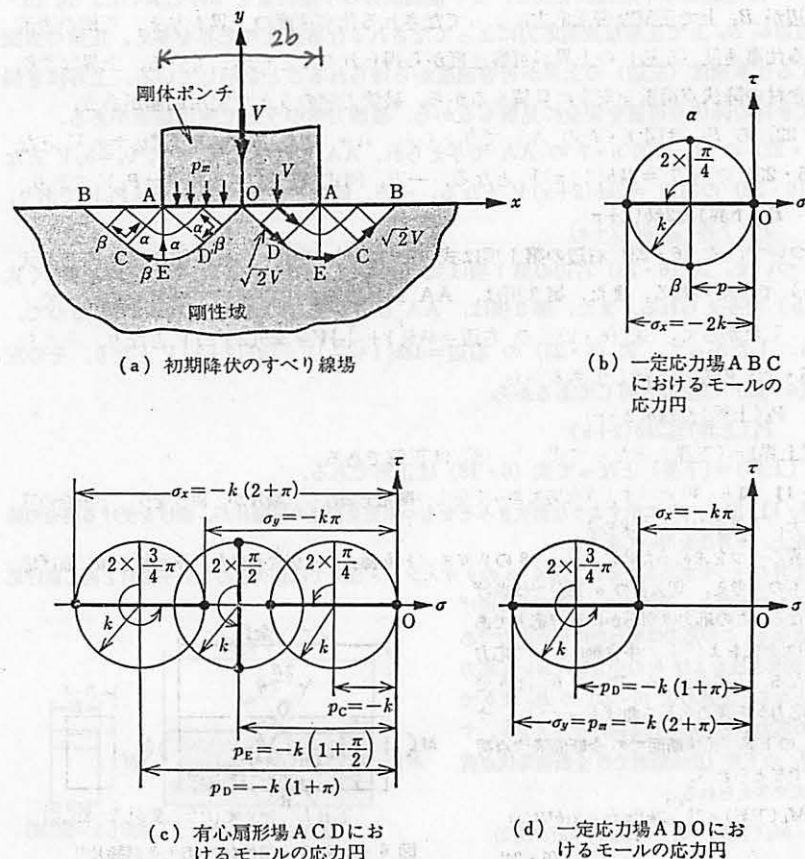


図 6・6 剛体ポンチの半無限体への押し込み²⁻⁴⁾

[†] この場合の境界条件は、接触面 AA 上の法線速度が V 、残りの自由表面部分で外力零であり、速度と応力の混合境界値問題である。

(a) は変形する塑性域のすべり線場と速度場を示し、図 (b)~(d) は式 (6・16) によって求めた各領域での Mohr の応力円を示す。図 (d) より、ポンチ圧力すなわち AO 上の y 方向の応力は $\sigma_y = p_m = -k(2+\pi) = -2.57 \times 2k$ となる。したがって、初期降伏点荷重（圧縮）は次式で与えられる。

$$P_L = 2bp_m, \quad p_m = 2k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6 \cdot 18)$$

また、初期降伏の始まったときのポンチの降下速度を V とすると、OA 上で $v_x = 0$, $v_y = -V$ 、ODECB に沿って $v_\alpha = 0$ 、領域 OABCEDO 内の α すべり線はすべて直線であるから、式 (6・14) の第 1 式より $v_\alpha = \text{一定}$ であつて零となる。そこで、領域 OAD 内で速度は OD 方向をもつことと、不連続線に沿っての不連続量は一定であることより、 $v_\beta = \sqrt{2}V$ となる。領域 ACD 内ではいたるところで $v_\alpha = 0$ であるから式 (6・14) の第 2 式より、 β 曲線に沿って $v_\beta = \text{一定}$ となるが、OAD 内で $v_\beta = \sqrt{2}V$ であるので、ACD 内でも $v_\beta = \sqrt{2}V$ となる。同様にして、領域 ABC についても $v_\beta = \sqrt{2}V$ となり、ポンチで押しつけられた材料が CB 方向に $\sqrt{2}V$ だけ流れることにより、ポンチの下降が始まることになる。

Hill の解は決して唯一の解ではなく、Prandtl は図 6・7²⁾ に示すような他のすべり線場を考えた。以下、例題として初期降伏点荷重 P_L と速度を求めてみよう。

図 6・6(a) に示したヒルの解と全く同様にして応力分布を求めることができ、変形する塑性域内の結果はヒルの解と一致する。また速度については、領域 ACA がポンチに付着した剛体のように運動し、これが変形しない塑性域となるような速度分布を考える[†]。このとき、変形する塑性域内は剛塑性境界に平行な $V/\sqrt{2}$ の大きさをもち、AC および CDB 上で接線速度に $V/\sqrt{2}$ の不連続を生ずる。初期降伏点荷重は Hill の解と一致するが、次のように塑性仕事 V^p から計算できる²⁾。すなわち、直交曲線座標 (α, β) におけるひずみ速度式

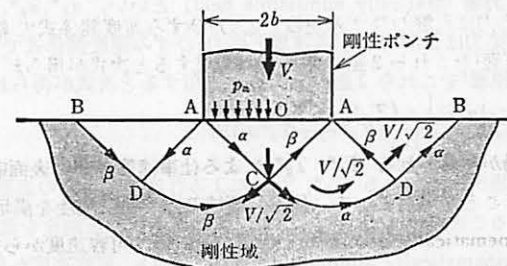


図 6・7 Prandtl の解²⁾

[†] Prandtl の解は速度場が一義的に決まらない欠点をもつが、ここではこのように考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_\alpha &= \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \phi}{\partial s_\alpha}, & \dot{\epsilon}_\beta &= \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} + v_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial s_\beta} \\ \dot{\gamma}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} - v_\beta \frac{\partial \phi}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial s_\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (6 \cdot 19)$$

を用いて、図 6・3(a) におけるせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}$ を求めると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \pm [(\dot{\epsilon}_\alpha - \dot{\epsilon}_\beta)^2 + \dot{\gamma}_{\alpha\beta}^2]^{1/2} = \pm [(\dot{\epsilon}_\alpha - \dot{\epsilon}_\beta)^2 + \dot{\gamma}_{\alpha\beta}^2]^{1/2} \\ &= \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} - v_\beta \frac{\partial \phi}{\partial s_\beta} \end{aligned} \quad (6 \cdot 20)$$

ここで、 $ds_\alpha = r d\phi$, $ds_\beta = dr$ である。式 (6・20) より、領域 ACA と ADB 内では $\dot{\gamma} = 0$ 、扇形領域 ACD 内では $\partial \phi / \partial s_\alpha = 1/r$, $v_\alpha = V / \sqrt{2}$ を考慮して、 $\dot{\gamma} = (V / \sqrt{2})(1/r)$ となるので、塑性仕事速度 $\dot{V}^p$ は次式のようになる。

$$\dot{V}^p = 2k \int_{\text{CD}} \dot{\gamma} r dr d\phi = 2k \int_{\text{CD}} (V / \sqrt{2}) dr d\phi = kbV\pi \quad (6 \cdot 21a)$$

ただし、扇形状の半径は $AC = \sqrt{2}b$ である。このほか、速度の不連続線 AC および CDB 上で、次式に示す塑性仕事率が単位時間についてやされる。

$$\begin{aligned} \dot{V}^p &= 2k \times \frac{V}{\sqrt{2}} (\widehat{AC} + \widehat{DB} + \widehat{CD}) = \sqrt{2}kV(2\sqrt{2}b + \frac{\pi b}{\sqrt{2}}) \\ &= 4kbV(1 + \frac{\pi}{4}) \end{aligned} \quad (6 \cdot 21b)$$

これら二つの $\dot{V}^p$ の和を外力の仕事速度 $2bp_m V$ と等置して、式 (6・18) をうる。

さらに、上述の P_L が正解であることを以下に示そう。

降伏点荷重が正解であることは、以下に述べる同荷重の上、下界をチェックすればわかる。いま、物体領域 R の境界 B のうち、境界 B_T 上で表面応力 T_x, T_y が与えられ、残りの境界 B_V 上で速度 v_α, v_β が与えられているとし、正解を与える応力場を $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 、ひずみ速度を $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}$ とする。別に、降伏条件を破らず、つり合い式と B_T 上での境界条件を満足する応力場を可容応力場 (statically admissible field) といい、 $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*$ で表す。この場合、必ずしも可容応力は正解のひずみ速度と応力-ひずみ速度関係式で結ばれている必要はない。仮想仕事の原理†をこれら 2 組の応力場に適用すると次式が得られる⁹⁾。

$$\int_{B_V} (T_x v_x + T_y v_y) ds \geq \int_{B_V} (T_x^* v_x + T_y^* v_y) ds \quad (6 \cdot 22)$$

これは、任意の可容応力場から導かれる T_x^*, T_y^* による仕事速度が真の表面応力 T_x, T_y のなすその下界を与えることを示している。他方、領域 R 内で非圧縮性を満足する速度場 v_x^*, v_y^* を可容速度場 (kinematically admissible field) といい、可容速度から式 (6・10)

† 仮想仕事の原理は、この場合

$$\int_R (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) dA = 0$$

で表される。ただし、領域 R の面素を dA 、境界 B の線素を ds とする。

により導かれるひずみ速度 $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}$ は必ずしも正解の応力と応力-ひずみ速度関係で結ばれている必要はない。いま、 $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}$ と応力-ひずみ速度関係式で結ばれ、かつ降伏条件を満足する応力場を $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ とすると、この応力場は必ずしも応力のつり合い式を満足するとは限らない。再び仮想仕事の原理†を可容速度場に適用し、かつ最大塑性仕事の原理と Levy-Mises の式 (6・9) を用いて次の関係式をうる¹⁰⁾。

$$\int_{B_V} (T_x v_x + T_y v_y) ds \leq \int_R k \dot{\gamma} dA + \int_{\Gamma} k dv_i ds - \int_{B_T} (T_x v_x + T_y v_y) ds \quad (6 \cdot 23)$$

ここで、 Γ は速度場の不連続線を表し、その接続成分の不連続量を dv_i とおいた。式 (6・23) の右辺が B_V 上で正解な表面応力によってなされる仕事速度の上界を与え、正解の表面応力のする仕事速度 (左辺) の上界が可容速度から得られることを示している。上界はき裂材や切欠き材の降伏点荷重を安全に見積もるから、破壊力学のうえで実用価値がある。

式 (6・22) の B_V は図 6・7 の AA で与えられ、AA では $T_x^* v_x + T_y^* v_y = \sigma_y V$ となり、式 (6・22) の右辺 $= 2kb(2+\pi)V$ となる。一方、同式の左辺 $= 2bp_m V = P_L V$ であり、

$$P_L (\text{下界}) \geq 2kb(2+\pi)$$

となる。ついで、式 (6・23) 右辺の第 1 項は式 (6・21a) で与えられ、第 2 項は同じく式 (6・21b) で与えられる。また、第 3 項は、AA 以外の部分で表面応力が零であるので、零となる。したがって、式 (6・23) の右辺 $= 4kb(1 + \frac{\pi}{2})V = 2kb(2+\pi)V$ となり、その左辺は式 (6・22) の左辺と同じであるから

$$P_L (\text{上界}) \leq 2kb(2+\pi)$$

となり、(上界) = (下界) となって式 (6・18) は正解である。

【例題 6・1】 図 6・8¹¹⁾ に示すような切欠きをもつ剛完全塑性の試験片が、曲げを受ける場合の降伏点荷重を上、下界法を用いて求めよ。

【解】 下界の一つを求めるために、図 6・8 のリガメント b 部分では切欠きのない平滑材と同じ曲げ応力を受けるものと考え、切欠きの a 部分では曲げ応力は零となる。この応力は明らかに可容応力であり、また切欠き底および b の中立軸において応力は不連続となる。上述の式 (6・22) の B_V は b であり、この応力から求められる曲げモーメント、すなわち M_L の下界 (正味断面での全断面降伏点荷重) は次式で与えられる。

$$M_L (\text{下界}) = 2 \int_0^{b/2} 2kBy dy = k(b^2 B/2) \quad (6 \cdot 24)$$

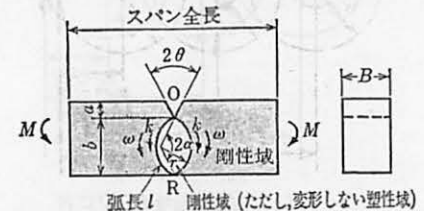


図 6・8 剛完全塑性体の切欠き試験片¹¹⁾

M_L の上界の一つは、図 6・8 の二つの円弧 OR (その曲率半径を r 、弧の長さを l とする) によ

† ここでは可容速度場を考えるので、 Γ に沿って接線方向速度の不連続量 dv_i による仕事速度 $\int_{\Gamma} T dv_i ds$ を含めた式を用いる。ただし、 T は Γ に沿う表面応力の接線成分である。

て開かれた変形しない塑性域 (そのせん断降伏応力は k) を静止したピボットのようにみなして, 左右の領域が剛体的に ω なる角速度で回転する速度場を考える. 上述の式 (6・23) の右辺第1項はピボット領域内で $\dot{\gamma}^0 = 0$ であるから零, 第3項の v_x^0, v_y^0 はいずれも零であるから, 第2項のみを考える. すなわち, 第2項は $2(klr\omega B)$ となり, また式 (6・23) の左辺 $= 2M\omega$ であるから, M_L の上界は次式で与えられる.

$$M_L(\text{上界}) = klrB = k(b^2B/2) \operatorname{cosec}^2 \alpha \cdot \alpha \quad (6 \cdot 25 a)$$

ここで, $l = r(2\alpha)$, $r = (b/2) \operatorname{cosec} \alpha$ の幾何学的関係を用いた. この最小値を求めるため $(dM_L/d\alpha) = 0$ とおくと, $\tan \alpha = 2\alpha$ すなわち $\alpha = 66^\circ 47'$ のとき成り立ち, 式 (6・25 a) は次式のようになる.

$$M_L(\text{上界}) = 0.69kb^2B \quad (6 \cdot 25 b)$$

式 (6・24) と (6・25 b) から M_L の正解は

$$0.5kb^2B < M_L(\text{正解}) < 0.69kb^2B \quad (6 \cdot 25 c)$$

となることがわかる.

$M_L(\text{上界})$ が $M_L(\text{下界})$ の 1.38 倍大きくなることは, 切欠き断面 bB にわたる塑性拘束によるものである. 上界の降伏点荷重を平滑材の降伏点荷重 (この例題では下界) で割ったものは拘束係数 (constraint factor) と呼ばれ, き裂材や切欠き材の降伏点荷重増大の見安となるものである†. これに対して, 計算方法は省略するが切欠き底近傍での応力拡大 $Q = \sigma_{\max}/\sigma_y$, は切欠き半角 θ が約 20° 以下, (リガメント深さ)/(スパン半長) が約 0.35 以下において, 2 以上の値をとる⁵⁾.

〔4〕 剛完全塑性のき裂材のすべり線場による近似解法 図 6・9 は, Orowan⁶⁾ の示唆に基づいて, 平面ひずみの状態で単純引張りを受ける深いき裂を有する両側き裂材の正味断面応力 σ_{net} , 降伏点荷重 P_L , 拘束係数 $L = P_L/(2\sigma_y bB)$ および応力拡大 $Q = \sigma_y \max/\sigma_y$ を求めるための経過を示したものである. すなわち, (a) に示す剛体ポンチの半無限体への押し込みすべり線場は, そのまま (b) に示す引張荷重を受ける無限体中のき裂先端のすべり線場に適用することができ, 結局 (c) に示す有限幅 $2W$ の両側き裂材 (ただし両側き裂は十分深いとする††) のすべり線場へ適用される. 挿入した応力状態を参照して

$$\sigma_{\text{net}} = \sigma_y = 2k \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = 2.57 \times 2k$$

$$P_L = 2k \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) (2bB) = 2.57 \times 4kbB$$

$$L = 2.57 \text{ (Tresca), } 2.97 \text{ (Mises)}$$

$$Q = 2.57 \text{ (Tresca), } 2.97 \text{ (Mises)}$$

(平面ひずみの
深いき裂をも
つ両側き裂) †††

となる. また, き裂先端の有心扇形すべり線場の相当塑性ひずみ ϵ_e^p は

$$\epsilon_e^p = (\text{扇形部の単位面積当たりの } U^p) / (\text{相当応力 } \sigma_e)$$

$$= \frac{4kb\Delta\pi}{\pi(\sqrt{2}b)^2} / \sqrt{3}k = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\Delta}{b}$$

となる. ただし, 扇形すべり線場では $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z$, $\tau_{r\theta} = k$ であるから θ に無関係に $\sigma_e =$

† 演習問題 [6・8] と比較せよ.

†† 演習問題 [6・5] より $W > 2.57b$ (Tresca), $2.97b$ (Mises) である.

††† 演習問題 [6・4] も参照のこと.

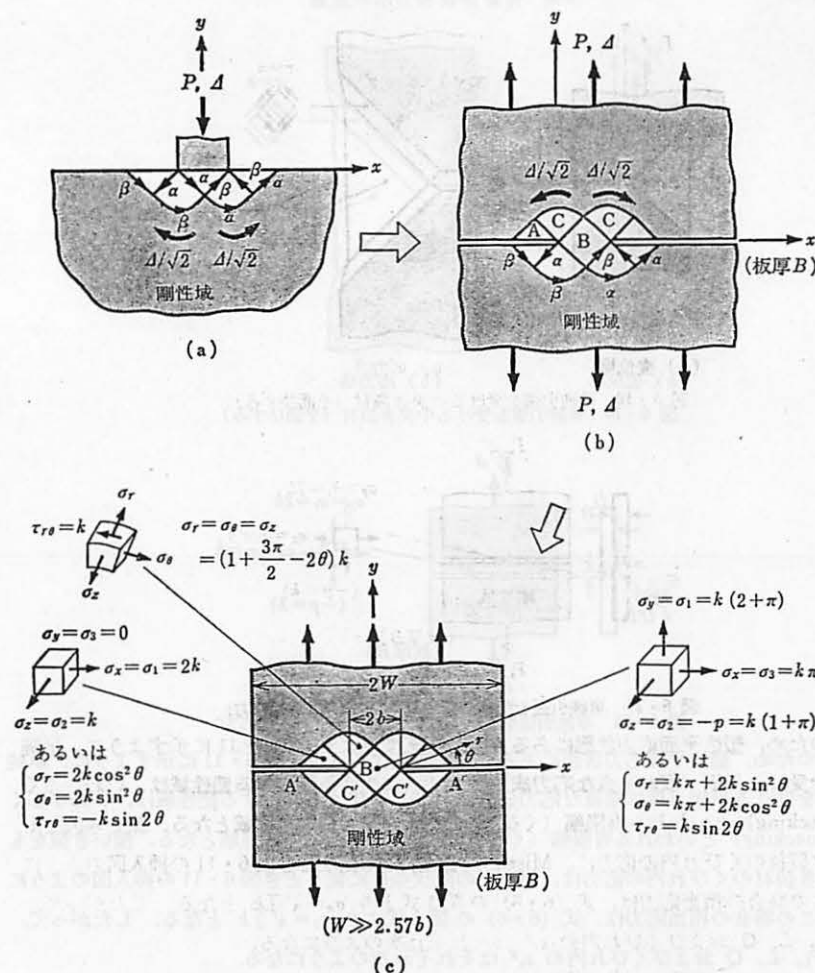


図 6・9 単純引張りを受ける深いき裂を有する両側き裂材 (平面ひずみ) Orowan⁶⁾ の示唆に基づく

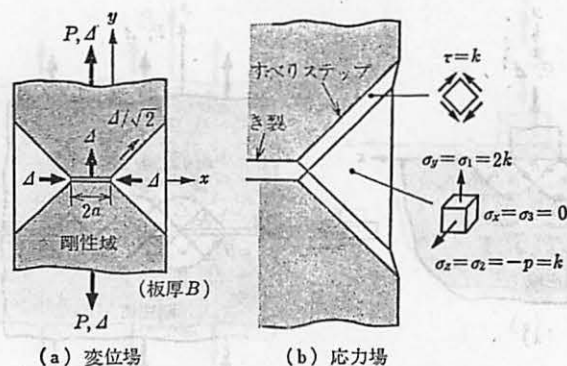
$\sqrt{3}k$ であり, また扇形部の半径は幾何学的関係から $\sqrt{2}b$ であり, さらに扇形部全体の U^p の計算は式 (6・21 a) で述べたとおりである. 同様に, 図 6・10 に示す中央き裂材について計算すると次式をうる.

$$\sigma_{\text{net}} = \sigma_y = 2k = \text{一定}$$

$$P_L = 4kbB$$

$$L = Q = 1 \text{ (Tresca), } 1.16 \text{ (Mises)}$$

(平面ひずみの
中央き裂)



(a) 変位場 (b) 応力場
図 6-10 単純引張を受ける中央き裂材 (平面ひずみ)

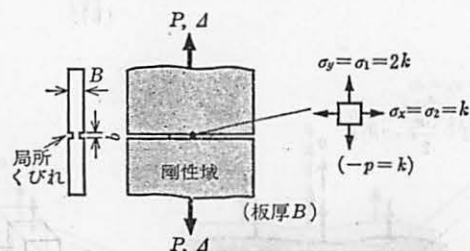


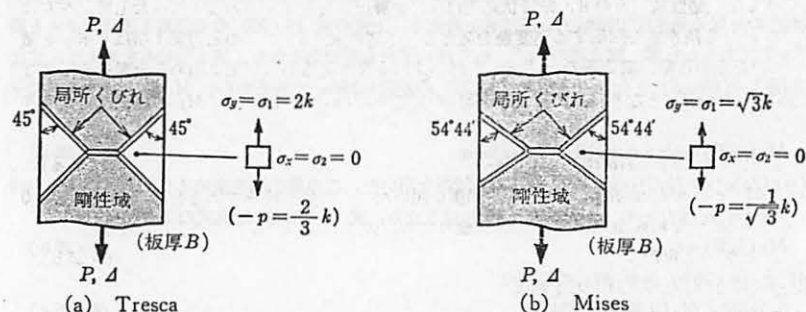
図 6-11 単純引張を受ける深い両側き裂材 (平面応力)

比較のため、塑性平面応力状態にあるき裂を考えてみよう。図 6-11 に示すように、単純引張力を受ける平板 (板に垂直な応力成分 $\sigma_z=0$) に生ずる変形する塑性域は、いわゆるくびれ (necking) といわれる有限幅 (くびれ幅を b とする) の直線域となる。深いき裂をもつ両側き裂材のくびれ内の応力は、Mises の降伏条件に従うとき図 6-11 の挿入図のようになる。この場合の相当応力は、式 (6-6) の第 1 式より $\sigma_e = \sqrt{3}k$ となる。したがって、 σ_{net} , P_L , L , Q およびくびれ内の ϵ_e^p はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{net} &= \sigma_y = 2k = \text{一定} \quad (\text{Mises}) \\ P_L &= 4kbB \quad (\text{Mises}) \\ L &= Q = 2/\sqrt{3} = 1.16 \quad (\text{Mises}) \\ \epsilon_e^p &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d}{b'} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{平面応力の深い} \\ \text{き裂をもつ両側} \\ \text{き裂} \end{array}$$

ここで、局所くびれが垂直方向に d (=試験片伸び変位) なる変位を受けるとき、 $\epsilon_y^p = d/b$, $\epsilon_z^p = 0$ となるので、くびれ部の相当塑性ひずみは式 (6-6) の第 2 式より上式のようになる。ただし、非圧縮性より $\epsilon_z^p = -\epsilon_y^p$ とおいた。一方、中央き裂材の場合は、図 6-12 に示

† 演習問題 [6-7] も参照のこと。



(a) Tresca (b) Mises
図 6-12 単純引張を受ける中央き裂材 (平面応力) (Hill¹⁾ の計算に基づく)

すように、局所くびれ部でかこまれる領域内の応力状態は挿入図のようになるので、 σ_{net} , P_L , L , Q およびくびれ内の ϵ_e^p はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{net} &= \sigma_y = 2k \quad (\text{Tresca}), \sqrt{3}k \quad (\text{Mises}) \\ P_L &= 4kbB \quad (\text{Tresca}), 2\sqrt{3}kbB \quad (\text{Mises}) \\ L &= Q = 1 \quad (\text{Tresca, Mises}) \\ \epsilon_e^p &= 0.82 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d}{b} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{平面応力の} \\ \text{中央き裂} \end{array}$$

ここで、くびれ内の変形は Hill¹⁾ による図 6-13 を参照して、くびれ内の変位は $v = Vy/b'$ となり、その x および y 成分はそれぞれ $v_x = Vy(\cos \phi)/b'$, $v_y = Vy(\sin \phi)/b'$ で表される。したがって、くびれ内の塑性ひずみは $\epsilon_x^p = \partial v_x / \partial x = 0$, $\epsilon_y^p = \partial v_y / \partial y = V(\sin \phi)/b'$, $\epsilon_z^p = -\epsilon_y^p$ (非圧縮性より)、および

$$\gamma_{xy}^p = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = V \frac{\cos \phi}{b'}$$

となる。ゆえに、相当塑性ひずみは式 (6-6) の第 2 式より ϕ に無関係に

$$\epsilon_e^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{V}{b'}$$

となる。ここで、 V と剛性域の変位、すなわち試験片の伸び変位 d との間には、

$$V = d \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = 0.82d$$

の関係があるので

$$\epsilon_e^p = 0.82 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d}{b'}$$

となる。ただし、 $\phi = 19^\circ 28'$ である†。

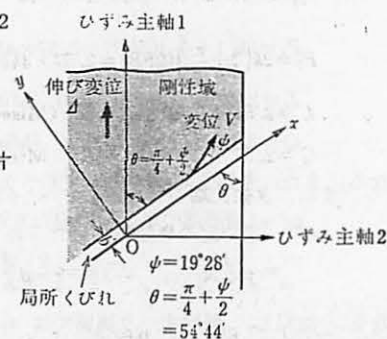


図 6-13 局所くびれ部の変形¹⁾ (平面応力)

† くびれ部の変位 V の方向とくびれとのなす角 ϕ は塑性平面応力問題では $\sin \phi = (1/3)(\sigma_1 + \sigma_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)$ となり、いまの場合、 $\sigma_1 = \sqrt{3}k$, $\sigma_2 = 0$ であるから $\sin \phi = 1/3$ となる†。

[5] 弾完全塑性のき裂材の J 積分による近似解法^{8,9)} 単純引張りを受ける弾完全塑性のき裂材のき裂先端近傍の平面ひずみの塑性変形について、もう少し詳しく調べてみよう。そのために、まず Rice⁸⁾ によって提案された J 積分について述べる。

J 積分 (J -integral) とは、図 6・14(a) に示すように x 軸に沿う開き角零のき裂の下面を出発点として、反時計まわりの上面に至る、き裂先端を囲む二次元弾性体 (線形および非線形の) の経路 Γ に沿った次式の線積分で定義される。(2章の2・14節を参照)

$$J = \int_{\Gamma} [U_0 dy - T \cdot (\partial u / \partial x) ds] \quad (6 \cdot 26)$$

ただし、 U_0 : ひずみエネルギー密度で x, y 座標では $U_0(x, y)$ [式 (6・5) で添字 p をはずし、かつ $\sigma_x \varepsilon_x = \tau_{yz} \gamma_{yz} = \tau_{zx} \gamma_{zx} = 0$ とおく]

T : Γ 上の表面応力ベクトルで、 r, θ 成分は σ_r, σ_θ

u : 変位ベクトルで r, θ 成分は u_r, u_θ

$$\begin{aligned} T(r, \theta) \cdot \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial x} &= \sigma_r \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \sin \theta \right) \\ &\quad + \tau_{r\theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} - \frac{u_r}{r} \sin \theta \right) \\ &= \sigma_r \left[\varepsilon_r \cos \theta - \left(\frac{1}{2} \gamma_{r\theta} - \omega \right) \sin \theta \right] \\ &\quad + \tau_{r\theta} \left[\left(\frac{1}{2} \gamma_{r\theta} + \omega \right) \cos \theta - \varepsilon_\theta \sin \theta \right] \end{aligned}$$

である。ここで、円柱座標に関する次式の反時計まわりの正値とする回転角 ω および各ひずみ成分

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \frac{1}{2} \gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$$

と応力成分の座標変換式

$$\sigma_x = \sigma_r - \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma_r + \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{r\theta} \cos 2\theta$$

を用いた。ただし、表示式を簡単にするため、有心扇形すべり場 [式 (6・16)] における σ_r

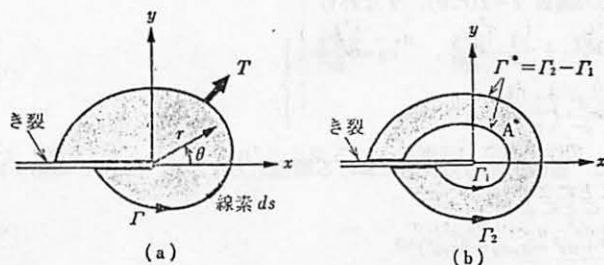


図 6・14 J 積分の定義⁸⁾

$= \sigma_\theta$ の関係を用いた。 Γ をき裂先端を中心とする半径 r の円とすると、 $dy = r d\theta \cos \theta$, $ds = r d\theta$ となるから、式 (6・26) は

$$\begin{aligned} J &= r \int_{-\pi}^{+\pi} \left[U_0 \cos \theta - \sigma_r \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \sin \theta \right) \right. \\ &\quad \left. - \tau_{r\theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} - \frac{u_r}{r} \sin \theta \right) \right] d\theta \end{aligned} \quad (6 \cdot 27 a)$$

あるいは

$$\begin{aligned} J &= r \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ U_0 \cos \theta - \sigma_r \left[\varepsilon_r \cos \theta - \left(\frac{1}{2} \gamma_{r\theta} - \omega \right) \sin \theta \right] \right. \\ &\quad \left. - \tau_{r\theta} \left[\left(\frac{1}{2} \gamma_{r\theta} + \omega \right) \cos \theta - \varepsilon_\theta \sin \theta \right] \right\} d\theta \end{aligned} \quad (6 \cdot 27 b)$$

で表される。

J 積分は、き裂先端を囲むあらゆる経路に対して同じ値をもつ。いま、図 (b) に示すように二つの経路 Γ_1, Γ_2 を考え、それに対応する J 積分値を J_1, J_2 で表す。式 (6・26) の被積分表示式はき裂の上、下面で零であるから、 $J_2 - J_1$ は経路 Γ_1, Γ_2 とき裂の上、下面の線分間で囲まれる面積 A^* の輪かく Γ^* に沿う積分を表す。この線積分を Green の公式によって面積分にええ応力のつり合い式 (6・15) を用いると $J_1 - J_2 = 0$ 、すなわち J 積分値は経路に関係しない (path independent) ことがわかる。

いま、図 6・9(c) に示した深いき裂をもつ両側き裂先端の有心扇形すべり場 (C, C' 領域) に J 積分を適用してみよう^{8,9)}。ここで、弾完全塑性体を仮定しているのに弾性的非圧縮性は成り立たないが、全ひずみの中で占める弾性部分は小さいとして剛完全塑性体に対するすべり線場がそのまま使えるものと考え。したがって、 C あるいは C' 領域の応力成分は図中に示したとおりであり、また式 (6・10) と式 (6・17) の速度 v を変位 u に改めたのち、式 (6・17) を式 (6・10) に代入すると、零でないひずみ成分はせん断ひずみ $\gamma_{r\theta}$ のみで

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} [f'(r)(\theta) + f(\theta) + rg'(r) - g(r)]$$

となる。そこで、 $g(r)$ を $g(0) = 0$ を満足する r の 1 次関数と仮定し、かつ $\gamma_{r\theta} R(\theta) = f'(r)(\theta) + f(\theta)$ となる関数 $R(\theta)$ を定義すると、 $r \rightarrow 0$ において $\gamma_{r\theta} \rightarrow \gamma_{r\theta} [R(\theta)/r]$ 、したがって $U_0 \rightarrow k \gamma_{r\theta} [R(\theta)/r]$ となる。以上の値を式 (6・27 b) に代入し、若干の式の変形を行うと、 $r \rightarrow 0$ における J 積分は次式で与えられる。

$$J = 2k \gamma_{r\theta} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} R(\theta) \left[\cos \theta + \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta \right) \sin \theta \right] d\theta \quad (6 \cdot 28 a)$$

あるいは

$$J = 2k \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{du_\theta}{d\theta} \left(\cot \theta + 1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta \right) d\theta \quad (6 \cdot 28 b)$$

ただし, $r \rightarrow 0$ のとき

$$\omega \rightarrow -(\gamma_{rs}/2) = -\gamma_{rs}R(\theta)/(2r)^{\dagger}$$

および

$$u_y = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta + g(r) \cos \theta$$

より, $r \rightarrow 0$ のとき

$$(du_y/d\theta) = [f'(\theta) + f(\theta)] \sin \theta = \gamma_{rs}R(\theta) \sin \theta$$

の関係を用了。

き裂先端におけるき裂の上, 下面の全分離変位をき裂先端開口変位 (crack tip opening displacement: CTOD) δ と定義すると, $\delta = 2u_y$ (ただし, $\theta = 3\pi/4$) で表される。簡単のため, $(du_y/d\theta)$ は $\theta = \pi/2$ 軸について対称な関数であると仮定する。このことは,

$$u_y(\theta) \rightarrow \gamma_{rs} \int_{\pi/4}^{\theta} R(\theta) \sin \theta d\theta$$

より, 塑性域 $R(\theta)$ が y 軸に対称であると仮定することと等しい。いま, 式 (6.28b) の被積分表示式において,

$$\cot \theta + 1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \cot \theta + (\pi - 2\theta)$$

は, 図 6.15 に示すように $1 + (\pi/2)$ の $\theta = \pi/2$ に関して対称な項と, その他の反対称項に分けられ, したがって式 (6.28b) の積分計算は対称項 $(du_y/d\theta)[1 + (\pi/2)]$ について行えばよい。すなわち

$$J \doteq 2 \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) k \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{du_y}{d\theta} d\theta = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) k \delta$$

したがって

$$\delta \doteq 2J / [(2+\pi)k] \quad (\text{平面ひずみの大規模降伏}) \quad (6.29a)$$

となる^{8,9)}。ただし, $\delta = 2u_y$ (ここで $\theta = 3\pi/4$) を用いた。塑性域がき裂先端だけに局在する小規模降伏では, $J = [(1-\nu^2)/E] K_I^2$ (2章の式 (2.183) 参照) であるから式 (6.29a) より

$$\delta \doteq \frac{2(1-\nu^2)(K_I)^2}{(2+\pi)Ek} \quad (\text{平面ひずみ的小規模降伏}) \quad (6.29b)$$

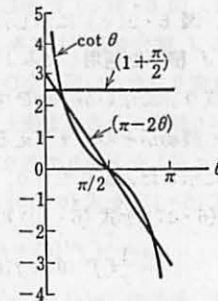


図 6.15 $\theta = \pi/2$ に関して対称な項 $(1 + \pi/2)$ と反対称な項 $\cot \theta$ および $(\pi - 2\theta)$

[†] $\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{2r} [f''(\theta) + f(\theta) - rg'(r) - g(r)]$

において, $r \rightarrow 0$ のとき

$$\omega \rightarrow -\frac{1}{2r} [f''(\theta) + f(\theta)] = -\frac{\gamma_{rs}}{2} = -\frac{\gamma_{rs}R(\theta)}{2r}$$

となる。

となる。他方, 塑性域寸法 R は以下のように求められる。いま, $R(\theta) \doteq R \cos \{2[\theta - (\pi/2)]\}$ ($\theta = \pi/2$ について対称) と近似し, これを式 (6.28a) に代入すると

$$J \doteq 2k\gamma_{rs}R \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos(2\theta - \pi) \left[\cos \theta + \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) \sin \theta \right] d\theta \\ = \frac{2\sqrt{2}}{3} (2+\pi) Rk\gamma_{rs}$$

となり, したがって

$$R \doteq \frac{3J}{2\sqrt{2}(2+\pi)k\gamma_{rs}} \quad (\text{平面ひずみの大規模降伏}) \quad (6.30a)$$

となる^{8,9)}。また, 小規模降伏では次式のようになる。

$$R \doteq \frac{3(1-\nu^2)(K_I)^2}{2\sqrt{2}(2+\pi)Ek\gamma_{rs}} \quad (\text{平面ひずみ的小規模降伏}) \quad (6.30b)$$

以上の解析から以下のことがらわかる。

(1) 弾完全塑性のき裂先端における大規模降伏時のき裂先端開口変位 (CTOD) δ は J 積分値と結びつけられ, $\delta = M(J/\sigma_{ys})$ と書くことができる。ここで, M はき裂材の負荷型式あるいは幾何形状と降伏条件によって決まる係数であり, 平面ひずみについて $M=0.67$ (Mises), 0.78 (Tresca) である。

(2) 大規模および小規模降伏を問わず, 平面ひずみ状態における CTOD の値 δ と塑性域寸法 R との間には $\delta \doteq 2\gamma_{rs}R$ (ここで, $\gamma_{rs} \doteq 0.002$) の関係が成り立ち, CTOD を著しく小さく見積もることになる。実際には, 大規模降伏の場合, き裂先端は鈍化 (blunting) し, その近傍のすべり線場は, たとえば Rice⁸⁾ の指適に基づくと図 6.16 に示すように対数らせん状に変化し, その結果, $R \doteq 2\delta$ となる。(演習問題【6.3】参照)

〔6〕 ひずみ硬化のき裂材の J 積分による近似解法¹⁾ さらに一般性をもたせるために, 式 (6.1) で表されるひずみ硬化を伴う弾塑性性体のき裂材に対する Hutchinson¹⁾ の解法を紹介しよう[†]。いま, 図 6.14(a) に示したように無限体中のき裂先端に原点をもつ r, θ 座標を考え, まず塑性平面応力状態における近似的解を求める。応力のつり合い式 (6.15) は, Airy の応力関数 $\chi = \chi(r, \theta)$, すなわち

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, & \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

を用いれば満足される。塑性平面応力状態における相当応力は, 式 (6.6) の第1式で $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ とおくことにより

$$\sigma_e = (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta + 3\tau_{r\theta}^2)^{1/2} \quad (6.32)$$

[†] ひずみ硬化のき裂材のき裂先端の塑性特異場は, Rice⁹⁾ や Hutchinson ら^{1,10,11)} の研究に負うところが大きい。

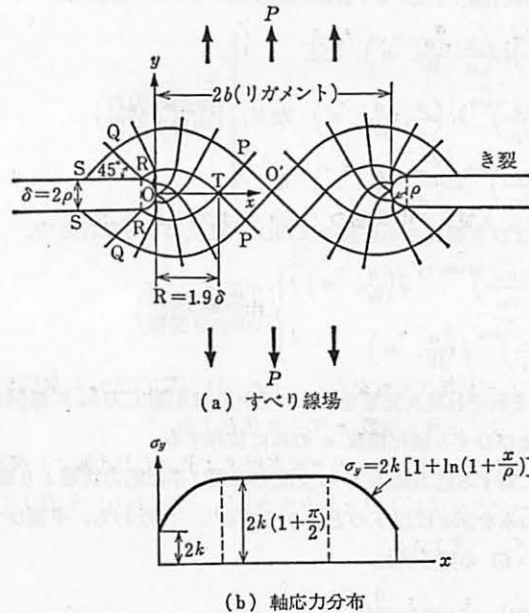


図 6.16 き裂先端が半円形に鈍化した平面ひずみ引張におけるリガメント部の (a) すべり線場と (b) 軸応力分布 ($b/\rho \geq e^{\pi/2} - 1$ の場合) (Rice²⁾ の指摘に基づく)

で与えられ、全ひずみ-応力関係式は式 (6.1) と (6.8) から次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \frac{\alpha}{E} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{ys}} \right)^{(1/n)-1} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \frac{\alpha}{E} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{ys}} \right)^{(1/n)-1} \left(\sigma_\theta - \frac{1}{2} \sigma_r \right) \\ \frac{\gamma_{r\theta}}{2} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{r\theta} + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{E} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{ys}} \right)^{(1/n)-1} \tau_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

ただし、 $E=2G(1+\nu)$ の関係式を用いた。また、全ひずみの適合条件式は次式で与えられる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varepsilon_\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (6.34)$$

式 (6.33) を式 (6.34) に代入すると、応力関数 χ の 4 階偏導関数を含む複雑な非線形偏微分方程式が得られる。

き裂先端のある大きさの領域における解 χ を求めるには、かなり複雑な計算を必要とするが、しかし 6.2 [5] 同様 $r \rightarrow 0$ を考えれば、解を級数展開したときの主要部 (特異点をもつ展開項) は次式によって十分近似的にできる¹⁾。

$$\chi = \sigma_{ys} K_\sigma r^{s+2} \tilde{\chi}(\theta) \quad (6.35)$$

ここで、 K_σ は非線形弾性応力拡大係数、 s はこれから求めようとする係数、 $\tilde{\chi}(\theta)$ は θ のみの関数で上述の 4 階偏微分方程式を満足する。6.2 [5] において U_0 は $r \rightarrow 0$ において $1/r$ の形の特異性をもつことを指摘した。他方、応力成分が r^k の形をとるので (式 (6.35) を式 (6.31) に代入して)、塑性ひずみ成分は式 (6.33) の右辺第 2 項より、 $r^{k/n}$ の形をもつ。したがって、 U_0 に関する r のべき数の比較から $k + (k/n) = -1$ 、すなわち $k = -1/[1/n + 1]$ となる。このとき、たとえば式 (6.35) による応力成分は $r^{s+2} = r^k$ の形の特異性をもつので、結局

$$s = k + 2 = \left[-1 / \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \right] + 2 = \left(\frac{2}{n} + 1 \right) / \left(\frac{1}{n} + 1 \right)$$

となることが容易にわかる。このようにして、き裂先端近傍の各応力成分および相当応力は、式 (6.35) を式 (6.31) に代入することにより、次式によって表される¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{ys} K_\sigma r^{s+2} [s \tilde{\chi}(\theta) + \tilde{\chi}''(\theta)] = \sigma_{ys} K_\sigma r^{-n/(n+1)} \tilde{\sigma}_r(\theta) \\ \sigma_\theta &= \sigma_{ys} K_\sigma r^{s+2} s(s-1) \tilde{\chi}(\theta) = \sigma_{ys} K_\sigma r^{-n/(n+1)} \tilde{\sigma}_\theta(\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \sigma_{ys} K_\sigma r^{s+2} (1-s) \tilde{\chi}'(\theta) = \sigma_{ys} K_\sigma r^{-n/(n+1)} \tilde{\tau}_{r\theta}(\theta) \\ \sigma_e &= \sigma_{ys} K_\sigma r^{s+2} \tilde{\sigma}_e(\theta) = \sigma_{ys} K_\sigma r^{-n/(n+1)} (\tilde{\sigma}_r^2 + \tilde{\sigma}_\theta^2 - \tilde{\sigma}_r \tilde{\sigma}_\theta + 3 \tilde{\tau}_{r\theta}^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (6.36a)$$

ただし、 $' = \partial/\partial\theta$ 、 $'' = \partial^2/\partial\theta^2$ であり、また

$$\tilde{\sigma}_r(\theta) = s \tilde{\chi}(\theta) + \tilde{\chi}''(\theta), \quad \tilde{\sigma}_\theta(\theta) = s(s-1) \tilde{\chi}(\theta), \quad \tilde{\tau}_{r\theta}(\theta) = (1-s) \tilde{\chi}'(\theta) \quad (6.36b)$$

はいずれも θ のみの関数で無次元量である。塑性ひずみ成分は式 (6.33) の右辺第 2 項に式 (6.36a) を代入して求めることができ、同様にして変位成分も求めることができる¹⁾。

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^p &= \alpha \varepsilon_{ys} (K_\sigma)^{1/n} r^{-1/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_r^p(\theta) = \alpha \varepsilon_{ys} K_\sigma r^{-1/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_r^p(\theta) \\ \varepsilon_\theta^p &= \alpha \varepsilon_{ys} (K_\sigma)^{1/n} r^{-1/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_\theta^p(\theta) = \alpha \varepsilon_{ys} K_\sigma r^{-1/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_\theta^p(\theta) \\ \gamma_{r\theta}^p/2 &= \alpha \varepsilon_{ys} (K_\sigma)^{1/n} r^{-1/(n+1)} [\tilde{\gamma}_{r\theta}^p(\theta)/2] = \alpha \varepsilon_{ys} K_\sigma r^{-1/(n+1)} (\tilde{\gamma}_{r\theta}^p/2) \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

および

$$u_r = \alpha \varepsilon_{ys} K_\sigma r^{n/(n+1)} \tilde{u}_r(\theta), \quad u_\theta = \alpha \varepsilon_{ys} K_\sigma r^{n/(n+1)} \tilde{u}_\theta(\theta) \quad (6.38)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r^p(\theta) &= (\tilde{\sigma}_e)^{(1/n)-1} \left(\tilde{\sigma}_r - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_\theta \right), \quad \tilde{\varepsilon}_\theta^p(\theta) = (\tilde{\sigma}_e)^{(1/n)-1} \left(\tilde{\sigma}_\theta - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r \right), \\ \tilde{\gamma}_{r\theta}^p(\theta) &= \frac{3}{2} (\tilde{\sigma}_e)^{(1/n)-1} \tilde{\tau}_{r\theta} \end{aligned}$$

である。また、非線形弾性応力拡大係数 K_σ と同ひずみ拡大係数 K_ε との間には次式の関係がある¹⁾。

$$K_\varepsilon = (K_\sigma)^{1/n} \quad (6.39)$$

式 (6・39) に示した K_e と K_o は J 積分値と結びつけることができる。すなわち、図 6・14(b) に示した経路 Γ_1 に沿う J 積分値 J_1 と Γ_2 に沿うそれ J_2 とは等価であるが、経路 Γ_2 を弾性域にとるとき、塑性域にとられた経路 Γ_1 に沿う J_1 の値は容易に求めることができる。ここで、 Γ_1 は塑性域にとられるので、塑性応力とそのひずみについて計算すれば十分である。式 (6・27 a) における U_0^p は、式 (6・6) の第 3 式、式 (6・1) および式 (6・36 a) の第 4 式より、

$$\begin{aligned} U_0^p &= \int_0^{\sigma_e} \sigma_e d\epsilon_p = \alpha \sigma_{ys} \epsilon_{ys} \left(\frac{1}{n+1} \right) \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_{ys}} \right)^{(1/n)+1} \\ &= \alpha \sigma_{ys} \epsilon_{ys} (K_o)^{(1/n)+1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \bar{\sigma}_e^{(1/n)+1} \end{aligned}$$

となる。したがって、式 (6・27 a) の被積分表示式の第 1 項に U_0^p を、第 2, 3 項に式 (6・36) ~ (6・39) を代入することによって J_1 をうる。すなわち

$$\begin{aligned} J_1 &= \alpha \sigma_{ys} \epsilon_{ys} (K_o)^{(1/n)+1} I = \alpha \sigma_{ys} \epsilon_{ys} (K_e)^{n+1} I \\ &= \alpha \sigma_{ys} \epsilon_{ys} K_o K_e I \end{aligned} \quad (6 \cdot 40)$$

ただし

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \left(\frac{1}{1+n} \right) (\bar{\sigma}_e)^{(1/n)+1} \cos \theta - \sin \theta \left[\bar{\sigma}_r \left(\bar{u}_\theta - \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{\tau}_{r\theta} \left(\bar{u}_r + \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} \right) \right] - \left(\frac{n}{n+1} \right) \cos \theta (\bar{\sigma}_r \bar{u}_r + \bar{\tau}_{r\theta} \bar{u}_\theta) \right\} d\theta \end{aligned} \quad (6 \cdot 41)$$

ここで、 I は無次元量である。また、 r は長さの単位をもつので、 $(K_o)^{(1/n)+1}$ および $(K_e)^{n+1}$ はともに長さの単位をもつが、 r をき裂半長 a など無次元化すれば、 K_o および K_e はともに無次元量（ $\cdot$ の記号をつける）となり、

$$\begin{aligned} J_1 &= \alpha \sigma_{ys} \epsilon_{ys} a (\hat{K}_o)^{(1/n)+1} I = \alpha \sigma_{ys} \epsilon_{ys} a (\hat{K}_e)^{n+1} I \\ &= \alpha \sigma_{ys} \epsilon_{ys} a \hat{K}_o \hat{K}_e I \end{aligned} \quad (6 \cdot 42)$$

で表される。他方、 J_2 の値は線形弾性計算から容易と求まり

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{(K_1)^2}{E} = \frac{\pi a (\sigma_\infty)^2}{E} = \sigma_{ys} \epsilon_{ys} a \pi \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ys}} \right)^2 \\ &= \sigma_{ys} \epsilon_{ys} a \pi (\hat{\sigma}_\infty)^2 \end{aligned} \quad (6 \cdot 43)$$

となる。したがって、式 (6・42) と式 (6・43) を等置すれば次式をうる¹⁾。

$$\hat{K}_o = (\hat{K}_e)^n = \left(\frac{\pi}{aI} \right)^{n/(n+1)} (\hat{\sigma}_\infty)^{2n/(n+1)} \quad (\text{平面応力の無限板}) \quad (6 \cdot 44 a)$$

このようにして塑性平面応力状態における非線形弾性応力拡大係数が求まる。ここで、 I は式 (6・41) に示したとおりである。

式 (6・36) ~ (6・38) の関係式は無限体のき裂材に対するものであるが、これらは有限幅 $2W$ をもつ中央き裂平板（き裂長さ $2a$ ）に対しても形式的に拡張できる¹⁾。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{\sigma_{ys}} &= \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ys}} \right) \hat{\sigma}_r \left(\frac{x}{a}, \frac{a}{W}, n \right) \text{ など} \\ \frac{\epsilon_r}{\epsilon_{ys}} &= \alpha \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ys}} \right)^{1/n} \hat{\epsilon}_r \left(\frac{x}{a}, \frac{a}{W}, n \right) \text{ など} \\ \frac{u_r}{\epsilon_{ys} a} &= \alpha \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ys}} \right)^{1/n} \hat{u}_r \left(\frac{x}{a}, \frac{a}{W}, n \right) \text{ など} \end{aligned} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{平面応力の} \\ \text{中央き裂板} \end{array} \right) \quad (6 \cdot 45)$$

この場合 J の積分値およびき裂長さ中央部の COD δ は次のようになる¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} J &= \alpha \sigma_{ys} \epsilon_{ys} a \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ys}} \right)^{(1/n)+1} \hat{J} \left(\frac{a}{W}, n \right) \\ \delta &= \alpha \epsilon_{ys} a \left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ys}} \right)^{1/n} \hat{\delta} \left(\frac{a}{W}, n \right) \end{aligned} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{平面応力の} \\ \text{中央き裂板} \end{array} \right) \quad (6 \cdot 46)$$

ここで、 $\hat{J}$ および $\hat{\delta}$ はそれぞれ無次元量を表し、それらは引張応力 σ_∞ に無関係で、無次元化パラメータ a/W およびひずみ硬化指数 n のみに依存する。

塑性平面ひずみ状態に対する応力関係 χ の支配方程式は平面応力状態より複雑になるが、それから得られる結果のみを示せば以下のとおりである¹⁾。すなわち、平面ひずみに対する相当応力 σ_e は、式 (6・6) の第 1 式に

$$\sigma_e = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta), \quad \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0$$

を代入して

$$\sigma_e = \left[\frac{3}{4} (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 3 \tau_{r\theta}^2 \right]^{1/2}$$

となり、これを用いるとき式 (6・36) ~ (6・38) は平面ひずみの場合にも成り立つ。ただし、この場合、

$$\epsilon_r^p = -\epsilon_\theta^p = \frac{3}{4} (\bar{\sigma}_e)^{(1/n)-1} (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta), \quad \bar{\tau}_{r\theta}^p = \frac{3}{2} (\bar{\sigma}_e)^{(1/n)-1} \bar{\tau}_{r\theta}$$

である。式 (6・44 a) に対応する平面ひずみに対する非線形弾性応力拡大係数 K_o と同じひずみ拡大係数 K_e は次式のようになる¹⁾。

$$\hat{K}_o = (\hat{K}_e)^n = \left[\frac{\pi (1-\nu^2)}{aI} \right]^{n/(n+1)} (\hat{\sigma}_\infty)^{2n/(n+1)} \quad (\text{平面ひずみの無限体}) \quad (6 \cdot 44 b)$$

ここで、 I は式 (6・41) で与えられるとおりである。

応力関数 χ を式 (6・35) の形で表すとき、関数 $\bar{\chi}(\theta)$ は上述の 4 階偏導関数を含む非線形微分方程式の解で与えられるが、 $\bar{\chi}(\theta)$ を求めることは複雑であるのでここでは述べない。境界条件についてのみ示せば、き裂上、下面 ($\theta = \pm\pi$) で $\sigma_\theta, \tau_{r\theta} = 0$ より $\bar{\chi}(\pm\pi) = \bar{\chi}'(\pm\pi) = 0$ 、さらにき裂まわりの応力場は $\theta = 0$ に関して対称であるから、 $\bar{\chi}(\theta)$ は偶対称となって $\bar{\chi}'(0) = \bar{\chi}'''(0) = 0$ である。 $\bar{\chi}(\theta)$ 、 $\bar{\chi}'(\theta)$ および $\bar{\chi}''(\theta)$ が求まれば、無次元化した応力成分が求まる。図 6・17(a) と (b) は塑性平面ひずみ状態における応力成分の角 θ による変

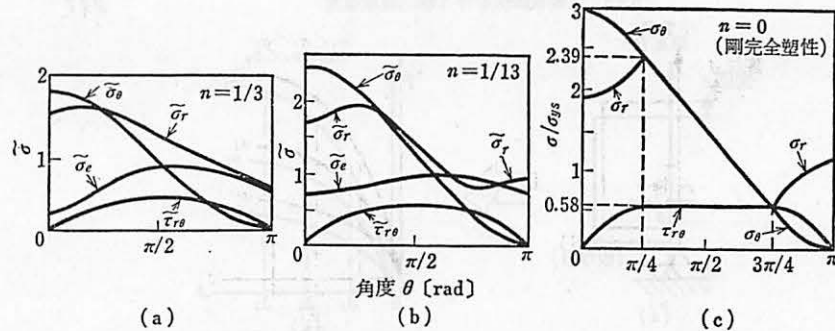


図 6-17 単純引張を受ける平面ひずみ状態における弾塑性および剛完全塑性の無限体のき裂先端近傍の各応力成分の θ による変化¹⁾

化を式 (6-36b) から Hutchinson¹⁾ が計算した結果を示し、ひずみ硬化の比較的小さい $n=1/13$ の場合は、図 (c) に示す剛完全塑性体に対するすべり線場から求めた結果[†] (応力成分は図 6-9(c) に示したとおり) と大差のないことがわかる¹⁰⁾。このことは、ひずみ硬化の比較的小さい場合、剛完全塑性解で充分代用できることを示している。

以上の解析から以下のことがわかる。

(1) ひずみ硬化のき裂材の非線形弾性応力拡大係数 K_e および同ひずみ拡大係数 K_e は平面応力状態については式 (6-44a)、平面ひずみ状態については式 (6-44b) のように表わされる。

(2) ひずみ硬化指数 n の比較的小さい場合のき裂先端近傍の塑性応力場は、剛完全塑性体に対する解と大差がない。

6-3 大規模降伏を伴う静的破壊強度

〔1〕 大規模降伏を伴う破壊のクライテリア 線形弾性体において、応力拡大係数 K はき裂先端前方の応力とひずみ場を特性づけるものであり、またき裂成長についやされるエネルギーを特性づけるものである。したがって、 K の限界値すなわち材料の破壊靱性 K_{Ic} は線形弾性体の破壊開始を決める力学量の一つとして用いることができ、すでに平面ひずみ破壊靱性 (K_{Ic}) 試験法^{††}も作成されている。小規模降伏においても、このような K 値のもつ特性は保有されると考えられ同様の取扱いができる。しかしながら、大規模降伏ではこのようなわけにはゆかない。いままでに破壊力学の立場から、大規模降伏を伴う破壊クライテリアのいくつかが提案されてきたが、いまのところ、 J 積分の限界値 J_e あるいは CTOD の限

† 有限要素法による数値計算結果もあり、それはすべり線場による結果とよく一致する¹²⁾。

†† ASTM, E 399-72 (米国); BSI, Draft for Development, No. 3 (1971) (英国) がある。

界値 $\delta_c^†$ を採用するクライテリアが最も普通である。その理由は、すでに 6-2〔5〕で述べた J 積分のもつ力学特性のほか、以下に述べる J 積分値の物理的意味によるものと思われる。

〔2〕 J_e クライテリアの物理的意味^{14,15)} 金属材料の塑性変形は、その構成原子間のすべり (slip) に基づくものであり、それによって格子欠陥 (lattice defect) の発生、増減および移動で代表される材料の構造変化が起こる。また、塑性変形の進行に伴って結晶内にはさまざまな不均質点を生み出す。

Eshelby¹³⁾ によれば、非弾性体中のある領域内のすべての特異点および不均質点に働く合力ベクトル F 、たとえば xy 平面における x 成分 F_x は式 (6-26) と全く同じ形式の積分で示されることがわかっている。この積分値は、特異点あるいは不均質点さえ増減しなければ、囲み Γ を変化させても変わらず、したがって積分経路には独立である^{††}。いま、不均質点として図 6-18^{13,14)} に示すような刃状転位 (線欠陥である転位の中で、転位線とバーガス・ベクトル b の方向が直角をなす成分) が xy 座標の原点で堆積している場合を考えると、その固着転位に働く力は式 (6-26) と類似の線積分によって求めることができる。ただし、 Γ は固着転位のみを囲む経路である。ここで、 Γ を可動転位を含む経路 Γ_1 で置き換えてみると、可動転位の力の方は零であるから、経路 Γ_1 に対する積分値は経路 Γ に対するそれと何ら変わらないはずである。したがって、連続に分布する転位 (continuously distributed dislocations) の場に加えられる力は、堆積転位^{†††}の先端を囲む経路に対する J 積分値によって与えられることがわかる。また、図 6-19¹⁴⁾ に示すように、き裂内に転位を堆積していると考え (このようにき裂内の仮想的な転位をき裂転位という)、き裂先端におけるき裂による特異点とき裂転位の堆積による特異点とが等しいと仮定すると、き裂進展力 (crack extension force) は堆積したき裂転位のもつ合力に等しくなり、図 6-19 の Γ ま

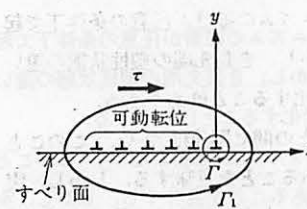


図 6-18 転位の堆積の J 積分^{13,14)}

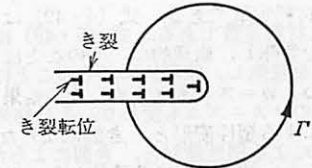


図 6-19 き裂転位の堆積と J 積分¹⁴⁾ (き裂転位はき裂が開くように配列)

† CTOD 試験法として、たとえば BSI, Draft for Development, No. 19 (1972) (英国) がある。

†† 実際には、き裂先端での転位密度 (あるいは不均質点の数) がそのまわりよりも大きくなるので、囲み Γ によって変化する¹⁴⁾。

††† 図 6-18 の堆積転位は一個の転位の記号で書いてあるが、実際には数多い転位群を形成する。

わりの J 積分値を求めることと等価である。なお、線形弾性体では、ひずみエネルギー解放率あるいはき裂進展力 g は J 積分に等しい (2章の2・14節を参照)。

Eshelby の意味において、 J 積分は弾塑性体中のき裂の生成とそれに直接関与する塑性域の生成に費されるポテンシャルエネルギーを用いて次式で表される。

$$J = \frac{1}{B} \left(-\frac{\partial U}{\partial a} \right) \quad [\text{MJ/m}^2, \text{MN/m}] \quad (6 \cdot 47)$$

ここで、 a はき裂長さ、 B は試験片厚さである。いま、Vitek と Chell¹⁵⁾ にしたがって γ を新しく単位面積のき裂面をつくるに必要なエネルギーとすると吸収全エネルギーは

$$B \int_0^a 2\gamma da = 2\gamma a B$$

となる。ただし、 γ は a に無関係と仮定し、また2をつけたのはき裂の上、下面を考えるからである。したがって、入力された全エネルギーは次式のようになる。

$$E = 2\gamma a B - B \int_0^a J da \quad [\text{MJ}, \text{MN} \cdot \text{m}] \quad (6 \cdot 48)$$

E の最大値は、 $dE/da = 0$ すなわち上式から

$$J = J_c = 2\gamma \quad [\text{MJ/m}^2, \text{MN/m}] \quad (6 \cdot 49)$$

のとき生ずる¹⁵⁾。これは脆性破壊に対するグリフィス (Griffith) の式と同じ形式になる。一度き裂が成長し始めると、変位 da はもはや平衡な変位でないで、 $J da$ はそのエネルギーの意味がなくなるだろう。その意味では、 J_c クライテリアは、もともと、き裂材の小規模あるいは大規模降伏を伴う破壊の開始条件 J_{Ic} を与えるものである。ここで注意すべきことは、塑性域の増大についてやされるエネルギーの中には新しくき裂面をつくるに必要なエネルギー γ を含まないことである。以上のことより J_{Ic} クライテリアは以下の仮定に基づくものであるといえる¹⁵⁾。

(1) γ は材料定数である。式 (6・49) は同一のメカニズムの破壊が任意の条件下で起こりうることを意味し、原理的に、そのことは正しい。しかし、き裂先端の塑性状態の違いによって破壊のメカニズムも変わり、その結果 J_{Ic} 値が変化することはありうる。

(2) き裂による塑性変形と、き裂によらない塑性変形との間に関連はない。このことは、き裂によらない塑性変形は J 積分からとり除く必要のあることを意味する。しかし、実際にはこのような分離が明確でない場合が多いので、実験的に求められる J_{Ic} 値は必ずしも一定でない。

(3) ポテンシャルエネルギー $-\int_0^a J da$ は破壊過程のみについてやされる。この仮定によって、たとえば図 6・20¹⁶⁾ に示すように、引張荷重 P -荷重点変位 Δ との実験的關係図から作図的に J 値を求めることができる。ただし、この場合、き裂による荷重点変位 Δ_{crack} が CTOD の値 δ にできるだけ近づくような試験片形状を選ぶ必要がある (6・3 [3] 参照)。

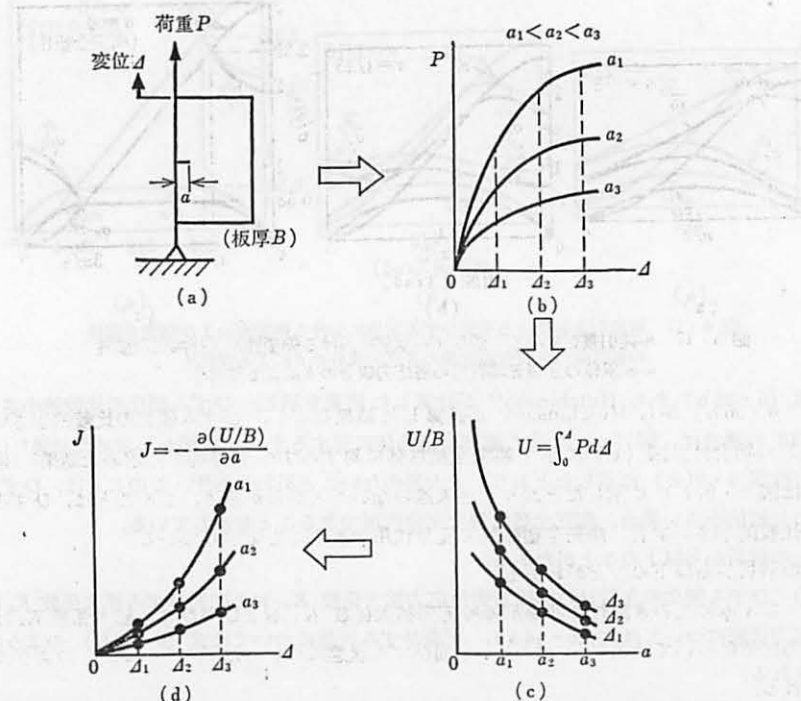


図 6・20 J 積分値を一連の P - Δ 線図から Δ の関数として作図的に求める方法¹⁶⁾

もし (3) の仮定が満足されない場合は、式 (6・48) で E を最大にするような一定の J 値すなわち J_{Ic} を決めることができない。典型的な例として、破壊前のすべりステップの形成 (図 6・10(b) 参照) によってき裂のない物体表面まですべり分離 (slip off) を起こす場合がそうである。

(4) エネルギー式 (6・49) はき裂材の大規模降伏を伴う破壊が開始するための必要かつ十分条件である。

J 積分値の簡易計算法がいくつか提案されている。それらは深いき裂材の P - Δ 線図上の一点から J 値を求めるもので、式 (6・47) に $U_d = \int_0^d P d\Delta$, $U_p = -\int_0^P \Delta dP$ を代入してから得られる次式を用いる¹⁷⁾。

$$J = \frac{1}{B} \int_0^d \left(-\frac{\partial P}{\partial a} \right) d\Delta = \frac{1}{B} \int_0^P \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a} \right) dP \quad (6 \cdot 50)$$

ここで、添字 d および P はそれぞれ Δ —一定、 P —一定を意味する。いくつかの具体例を以下に示す。

【例題 6・2】単純引張りを受ける両側き裂 (DECT) 試験片および中央き裂 (CCT) 試験片 (図 6・21) の J 値を求めよ。

$$J = \int_0^d P d\Delta \quad U = \int_0^P -\Delta dP$$

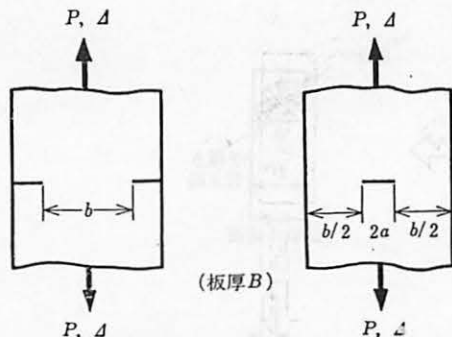


図 6-21 単純引張を受ける深いき裂を有する両側き裂 (DECT) 試験片と中央き裂 (CCT) 試験片

【解】 試験片の荷重点での変位 Δ を

$$\Delta = \partial U_{\text{total}} / \partial P = (\partial U_{\text{no crack}} / \partial P) + (\partial U_{\text{crack}} / \partial P) \\ = \Delta_{\text{no crack}} + \Delta_{\text{crack}} \quad \text{あるいは} \quad \Delta_{\text{elastic}} + \Delta_{\text{plastic}}$$

とおく。ここで、 $\Delta_{\text{plastic}} = bh(P/b)$ (h は P/b の関数) とおくと、式 (6-50) と部分積分法を用いて、単位厚さ当たりの J 値は次式となる¹⁷⁾。

$$J = J_e + \int_0^P \left(-\frac{\partial \Delta_{\text{plastic}}}{\partial b} \right)_P dP = g + \frac{1}{b} \int_0^P \left[P \left(\frac{\partial \Delta_{\text{plastic}}}{\partial P} \right)_b - \Delta_{\text{plastic}} \right] dP \\ = g + \frac{1}{b} \left[(P \Delta_{\text{plastic}})_0^P - \int_0^P \Delta_{\text{plastic}} dP - \int_0^P \Delta_{\text{plastic}} dP \right] \\ = g + \frac{1}{b} \left(2 \int_0^P \Delta_{\text{plastic}} P dP - P \Delta_{\text{plastic}} \right) \quad (6-51)^\dagger$$

ここで

$$-\frac{\partial \Delta_{\text{plastic}}}{\partial b} = \frac{P}{b} h \left(\frac{P}{b} \right) - h \left(\frac{P}{b} \right) = \frac{1}{b} \left[P \left(\frac{\partial \Delta_{\text{plastic}}}{\partial P} \right)_b - \Delta_{\text{plastic}} \right]$$

の関係式を用いた。また、 g はエネルギー解放率であり、 $g = J_e$ である。剛完全塑性体の場合は、式 (6-51) より $g=0$ 、 $P=P_L$ —一定において $J=(P_L \Delta/b)$ となる¹⁷⁾。ここで、 P_L は降伏点荷重であり、 $\Delta = \Delta_{\text{plastic}}$ である。CCT 試験片の場合も式 (6-51) が成り立つ。

【例題 6-3】 単純引張りを受ける深い環状切欠き丸棒材 (図 6-22) の J 値を求めよ。

【解】 $\Delta_{\text{crack}} = rg(P/r^2)$ (g は P/r^2 の関数) とおくと、【例題 6-2】と同様の方法により、 J 値は次式のようになる¹⁷⁾。

$$J = \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^P \left(-\frac{\partial \Delta_{\text{crack}}}{\partial r} \right) dP = \frac{1}{2\pi r^2} \left(3 \int_0^P P d\Delta_{\text{crack}} - P \Delta_{\text{crack}} \right) \quad (6-52)$$

剛完全塑性体の場合は、 $P=P_L$ —一定において $J=(P_L \Delta)/\pi r^2 = \sigma_{oc} \Delta$ となる¹⁷⁾。

【例題 6-4】 単純曲げを受ける深いき裂をもつ角棒 (図 6-23) の J 値を求めよ。

【解】 き裂底でき裂による回転角 $\theta_{\text{crack}} = f(M/b^2)$ (f は M/b^2 の関数) とおくと、さきと同様にして単位厚さ当たりの J 値

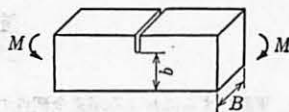


図 6-23 単純曲げを受ける深い片側切欠きみぞを有する角棒試験片

† 式 (6-51) で Δ_{crack} を用いると線形弾性のとき J 恒等的に零となりそれを Δ_{crack} の寄与とする と不合理であるので Δ_{plastic} を用いる。

は次式のようになる¹⁷⁾。

$$J = \int_0^M \left(-\frac{\partial \theta_{\text{crack}}}{\partial b} \right)_M dM = \frac{2}{b} \int_0^{\theta_{\text{crack}}} M d\theta_{\text{crack}} \quad (6-53)$$

あるいは

$$J = \frac{2}{b} \int_0^{\Delta_{\text{crack}}} P d\Delta_{\text{crack}}$$

ここで、 Δ_{crack} はき裂底でき裂による変位 (たわみ) である。式 (6-53) は深い切欠きをもつ三点曲げ試験片やコンパクトテンション (CT) 試験片に適用できる。ただし、三点曲げ試験片の場合の切欠き深さは、少なくとも計算される塑性域がき裂先端前方のリガメント部 b に十分制限されるようなものでなければならない。この場合の $\Delta_{\text{no crack}}$ は Δ_{crack} に比べてかなりの量となるので、それを式 (6-53) から J 値を計算する際取り除く必要がある。

一本の深いき裂を有する CT 試験片 (図 6-24) による簡易決定法も提案されている¹⁸⁾。この場合、き裂底での回転角 $\theta = (16/EB)[M/(W-a)^2]$ 、コンプライアンス $\theta/M \equiv \lambda = (16/EB)/(W-a)^2$ となるから、 $d\lambda = (-32/EB)[(W-a)^{-3}(da)]$ より

$$da = \frac{W-a}{2} \left(\frac{d\lambda}{\lambda} \right) g \left(\frac{a}{W} \right) \quad (6-54)$$

の関係式をうる¹⁸⁾。ここで、 $(d\lambda/\lambda)$ はコンプライアンスの相対変化、 $g(a/W)$ の試験片幅 W による修正係数で表 6-2¹⁸⁾ の値をとる。したがって、一本の CT 試験片を荷重の途中で少し除荷し、除荷時の弾性直線のこう配の変化を測定して式 (6-54) から da を求める。除荷による実験誤差は、除荷時のき裂先端の塑性域寸法 R が CTOD の値 δ に比べて小さくなるので、約 10% 程度の除荷ではほとんどないとみてよい¹⁸⁾。したがって、 J 値は

$$J = -\frac{\partial (U/B)}{\partial a}$$

より求める。

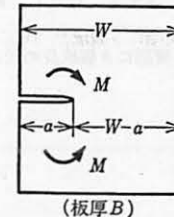


図 6-24 コンパクトテンション (CT) 試験片

表 6-2 $g(a/W)$ の値¹⁸⁾

a/W	$g(a/W)$
0.5	0.808
0.6	0.872
0.7	0.891
0.8	0.906
0.9	0.934
1.0	1.000

【3】 J_{Ic} の実験的な求め方²⁰⁾ J_{Ic} クライテリアの利点は、特異点の解がわからなくても、き裂先端近傍の弾塑性挙動さえわかれば、 J 値がかなり正確に計算できることである。また、他の利点は大規模降伏や全断面降伏にも適用できることである。しかし、 J_{Ic} クライテリアには次のような限界がある。すなわち J 積分が 2 次元 (平面) で定義される以上、そ

† 正確には軸力の効果を考える必要がある。

表 6・3 暫定的な J_{Ic} 試験法の要点²⁰⁾

試 験 片

- (1) 曲げ形式の試験片が必要。3点あるいは4点曲げ棒, CT 試験片, WOL 試験片を含む。
- (2) 試験片は $a/W \geq 0.6$ の深い切欠きをもつ。
- (3) すべての試験片は, 予想される限界荷重の 1/2 以下および $K_{max}/E < 0.05 \text{ mm}^{1/2}$ の最大荷重下で疲労き裂をあらかじめ入れる。
- (4) 同一き裂長さの 4~6 個の試験片を用意する。

試 験 装 置

- (1) 荷重モニターをもつ試験片
- (2) 荷重-荷重点変位を記録する X-Y レコーダ
- (3) き裂先端をマークする装置
- (4) き裂成長を測定する装置

試 験 方 法

- (1) 図 (a) に示すように, 異なる J に対する P を数本の試験片によって求める。この場合, P の一点は一試験片について求める。
- (2) 各試験片を除荷し, き裂をマークする。
- (3) 試験片を引裂き, き裂成長を測定する。き裂成長はその最大点で測定し, 疲労き裂からマーク端までのすべてのき裂を含むものとする [図 (b) 参照]。

デ ータ 解 析

- (1) J 値を荷重-荷重点変位曲線から $J=2A/bB$ を用いて計算する。ここで, A は負荷点までの曲線の面積 [図 (a) のハッチ部分], b は疲労き裂先端から測ったき裂の入っていないリガメントであり, B は試験片厚さである。
- (2) J - da 曲線をプロットする [図 (c) 参照]。
- (3) 直線 $J=2\sigma_{flow}(da)$ をひく [図 (d) 参照]。 $\sigma_{flow} = \sigma_{ys} + (\sigma_B/2)$ とする。ただし, σ_B は引張強度である。
- (4) J - da 曲線を実験点を通るようにひく [図 (d) 参照]。この場合, 実際にき裂成長の起こった実験点のみを通る曲線とする。
- (5) J_{Ic} 点を (3) と (4) の交点として求める [図 (d) 参照]。

試 験 片 寸 法

- (1) J_{Ic}/σ_{flow} を計算する。
- (2) a, B, b を J_{Ic}/σ_{flow} と比較する [$\alpha = \text{寸法}/(J/\sigma_{flow})$]。
- (3) α が 25 より大きいとき適切な試験片寸法と認知する。

これは平面ひずみあるいは平面応力状態に限定されることである。モード I (開口型) に対する J_{Ic} クライテリアは, 主として平面ひずみ状態, たとえば

$$a, b, B \geq \alpha (J_{Ic}/\sigma_{ys}) \quad (\alpha = 50^{19)}) \quad (6 \cdot 55)$$

の条件を満たす試験片が望ましいとされている。ここで a, b, B はそれぞれき裂半長, リガメント幅および試験片厚さである。式 (6・55) は, 線形弾性体に対する破壊靱性 (K_{Ic}) 試験方法を大規模降伏の場合へ拡張したものとみなされる。式 (6・55) で J/σ_{ys} を用いるの

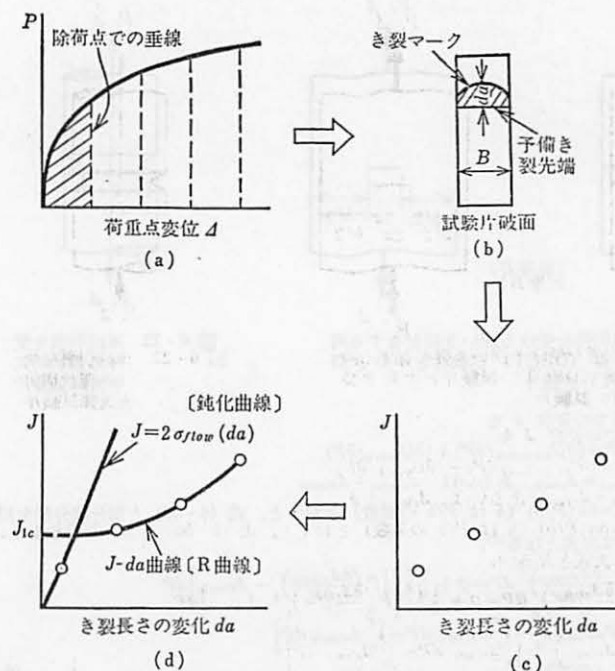


図 6・25 暫定的な J_{Ic} 試験方法の図解²⁰⁾ (図 (a) のハッチング部分で弾性除荷による面積を差引いてはならない)

は, それが CTOD とほぼ一次で結びつけられ, CTOD が試験片の幾何形状に半ば比例するので, J/σ_{ys} を破壊に関与する寸法域を表す寸法パラメータとして使用できるからである。

J_{Ic} クライテリアには種々な制限があるが, いまのところ大規模降伏や全断面降伏を伴う破壊の開始条件を定める実際的な方法として普及されつつある。ここでは, 材料の J_{Ic} を求めるための Landes および Begley† による暫定試験法として提案されているもの (ASTM の推奨試験法として準備中) を図 6・25²⁰⁾ および表 6・3²⁰⁾ に示す。

演 習 問 題

【6・1】 平面ひずみにおける剛完全塑性の中央き裂材について, その静水圧応力 p (正值) がせん断降伏応力 k に等しいのに対して, 深いき裂をもつ両側き裂材の p (正值) はその約 4.1 倍に上昇する。その原因と意味を考えよ。ただし, き裂材は無限体とする。

† J_{Ic} 試験法については Landes, Begley, Logsdon らの米国ウェスチングハウス社における研究¹⁹⁻²³⁾に負うところが大きい。

【6・2】深いき裂をもつ剛完全塑性の両側き裂材について、平面応力と平面ひずみにおけるき裂先端での塑性降伏の相違点をあげよ。

【6・3】切欠き先端が半径 $\rho = \delta/2$ の半円形をなす、深い両側き裂を有する剛完全塑性のき裂材の平面ひずみ引張における降伏点荷重 P_L 、拘束係数 L 、正味断面応力 σ_{net} および応力拡大 Q をそれぞれ求めよ。ただし、無限体とする。

【6・4】【6・3】で、き裂先端半径 ρ が無限に小さくなるときの各値を求めよ。

【6・5】【6・3】の解を有限幅 $2W$ の両側き裂材に適用する場合の適用範囲を検討せよ。

【6・6】【6・3】の拘束係数 L の下界を平面応力について求めよ²⁴⁾。

【6・7】【6・6】で、き裂先端半径 ρ が無限に小さくなったときの拘束係数 L を求めよ。

【6・8】曲げを受ける鋭い切欠きを有する平面応力状態における剛完全塑性の切欠き板の拘束係数 L を求めよ²⁴⁾。

引用および参考文献

- 1) J. W. Hutchinson, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 13 (1968)
- 2) 山田嘉昭, 塑性力学, 日刊工業新聞社, 215, 247 (1965)
- 3) R. Hill, *Q. J. Mech. App. Math.*, 2, 40 (1949)
- 4) 日本材料学会編, 塑性加工学, 養賢堂, 245, 265~268 (1971)
- 5) A. A. Wells, *Proc. Roy. Soc.*, A 285, 41 (1965)
- 6) E. Orowan, *Trans. Inst. Engrs. Shipbuilders Scotland*, 89, 165 (1945)
- 7) R. Hill, *J. Mech. Phys. Solids*, 1, 19 (1952)
- 8) J. R. Rice, *Trans. ASME, Ser. E*, 35, 379 (1967)
- 9) J. R. Rice, たとえば, *Fracture* (ed. by H. Liebowitz), Academic Press, Vol. II, 191 (1968)
- 10) J. W. Hutchinson, *J. Mech. Phys. Solids*, 337 (1968)
- 11) N. L. Goldman, J. W. Hutchinson, *Inter. J. Solids and Structures*, 11, 575 (1975)
- 12) N. Levy et al., *Inter. J. Fracture Mech.*, 17, 143 (1971)
- 13) J. D. Eshelby, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A 244, 87 (1957)
- 14) 大南正英, 塩沢和章, 多結晶体の強度と破壊, 破壊力学と材料強度講座 14, 培風館, 158~163 (1976)
- 15) V. Vitek, G. G. Chell, *Mat. Sci. Engng.*, 27, 209 (1977)
- 16) R. J. Bucci et al., *ASTM, STP 514*, 40 (1972)
- 17) J. R. Rice et al., *ASTM, STP 536*, 231 (1973)
- 18) G. A. Clarke et al., *ASTM, STP 590*, 27 (1976)
- 19) J. A. Begley, J. D. Landes, *ASTM, STP 514*, 1 (1972) における P. C. Paris の討論
- 20) J. D. Landes, J. A. Begley, *ASTM, STP 560*, 170 (1974)
- 21) J. D. Landes, J. A. Begley, *ASTM, STP 514*, 24 (1972)
- 22) J. N. Kass, J. A. Begley, H. Andrejaski, *J. Testing and Evaluation*, 2, 304 (1974)
- 23) W. A. Logsdon, *ASTM, STP 590*, 43 (1976)
- 24) H. Ford, G. Lianis, *J. App. Math. Phys. (ZAMP)*, 8, 360 (1957)

7章 延性破壊および高温強度

本章では、非線形破壊力学の強度性質への具体的応用として、金属材料の延性破壊および高温クリープ破壊と高温疲労について述べる。微小空洞の発生、成長、合体を経て起こるといわれている金属材料の延性破壊については、これらの過程を単純化したモデルによる初期の力学理論を通じて基礎的な考え方を説明する。また、高温クリープ破壊と高温疲労については、低延性あるいは高延性のき裂材の時間依存型き裂成長とクリープ域での繰返し数依存型き裂に対する破壊力学的パラメータの適用について述べる。

7・1 延性破壊に関する力学理論とその破壊力学的取扱い

〔1〕金属材料の延性破壊の特徴 延性破壊 (ductile fracture) の定義は厳密にはむづかしいが、ここでは脆性破壊に対比して、破壊が起こるまでに大規模降伏や全面降伏を伴う破壊であるとしておく。金属材料の延性破壊は、結晶劈開面での原子間結合が破れる劈開破壊 (3章参照) とは対照的に、結晶すべりに起因するものであり、せん断応力が重要な役割を果たす。結晶すべりによって破断 (rupture) する場合の巨視的破断形態はほぼ二種類に分類され、一つはすべり分離 (図 6・10(b) 参照) であり、他の一つはディンプル (dimple) 破壊である。電子顕微鏡によるフラクトグラフィ (破面解析)¹⁾ の研究によれば、延性破面の多くはディンプルと呼ばれるくぼみの連続から成り、多くの場合くぼみの中に介在物などの第二相 (second phase) を含んでいる。ディンプルの生成機構を図 7・1²⁾ に示す。くぼみ形状は図 (a) のように垂直応力のときは円形に近く、いわゆる等軸ディンプル (equi-axial dimple) となり、図 (b) のようにせん断応力あるいは図 (c) のように引裂き応力 (tear stress) による場合は、引き伸ばされた形のディンプル (elongated dimple) となる (図 7・2²⁾)。ちなみに、図 7・3 に示す静的引張試験における延性破断によくみられるカップ・コーン (cup and cone) 形の破面のカップ中央部の繊維状破面 (fibrous fracture surface) には図 7・1(a) の形式のディンプルが、また周辺部のせん断破面 (shear fracture surface) には図 (b) あるいは (c) 形式のディンプルが現れる。このように、破面のディンプルの形をみて負荷応力の種類を知ることできる。

ディンプルの形成過程については多くの研究があり、第二相を起点としてその周辺に塑性

- 21) F. Garofalo (足立正雄訳), 金属クリープの基礎, 丸善, 234 (1968)
- 22) H. Riedel, *Mat. Sci. & Engng.*, 30, 187 (1977)
- 23) M. J. Sivers, A. T. Price, *Inter. J. Fracture Mech.*, 9, 199 (1973)
- 24) 小寺沢良一ほか, 材料, 24, 1114, 1121 (1975); 26, 948 (1977)
- 25) 坂田 勝, I. Finnie, 日本機械学会論文集, 41, 1089 (1975)
- 26) R. D. Nicholson, C. F. Formby, *Inter. J. Fracture*, 11, 595 (1975)
- 27) 大谷隆一ほか, 材料, 22, 291 (1973); 25, 738, 746, (1976)
- 28) たとえば, 久保司郎ほか, 機械の研究, 28, 1397 (1976), 29, 27, 266 (1977)
- 29) 大路清嗣ほか, *Proc. of 1974 Symp. on Mechanical Behavior of Mat.*, 1, 455 (1974)
- 30) J. D. Landes, J. A. Begley, *ASTM. STP 590*, 128 (1976)
- 31) 元家勝彦, 日本機械学会講演論文集, No. 775-2, 71 (1977)
- 32) 大路清嗣ほか, 日本機械学会講演論文集, No. 740-11, 207 (1974), No. 750-13, 65 (1975), No. 774-1, 88 (1977), No. 770-11, 33 (1977)
- 33) たとえば, *Interpretation of ASME Boiler & Pressure Vessel Code, Case 1592, Class 1 Components in Elevated Temperature Service* (1976), ASME
- 34) S. S. Manson, *Exp. Mech.*, 8, 349 (1968)
- 35) たとえば, N. J. Wadsworth, J. Hutchings, *Phil. Mag.*, 3, 115 (1958)
- 36) 大南正英, 今村龍三, 材料, 25, 991 (1976); 27, 370 (1978)
- 37) たとえば, 小寺沢良一, 金属材料の高温強度 (平 修二編), 養賢堂, 241 (1968)
- 38) たとえば, *ASTM, STP 489* (1969)
- 39) たとえば, 大南正英, 坂根政男, 機械の研究, 38, 499 (1976); 鉄と鋼, 64, 331 (1977)
- 40) H. D. Solomon, L. F. Coffin, Jr., *ASTM, STP 560*, 112 (1973)
- 41) L. F. Coffin, Jr., 材料, 21, 186 (1972)
- 42) L. A. James, *Inter. J. Fracture Mech.*, 8, 347 (1972)
- 43) M. O. Speidel, *Proc. High-Temperature Materials in Gas Turbine*, Elsevier Sci. Pub., 207 (1974)
- 44) 大南正英, 坂根政男, 日本機械学会論文集, 42, 1305 (1976)
- 45) 大南正英ほか, 材料, 20, 236 (1971); 21, 225, 1086 (1972); 大南正英, 塩沢和章, 上出, 144

演習問題解答

2章 線型破壊力学の理論

【2・1】点 z_1 での応力は, 2・11 [1] で $a-b=c$ を一定にしてき裂長さ $2a$ を十分大きくした場合の点 $z=a+z_1$ における応力に等しい. Z_1, K_I は, 式 (2・141), (2・143a) で $b=a-c, z=a+z_1$ とおき $a \rightarrow \infty$ として得られる.

$$Z_1 = \frac{P}{\pi(z_1+c)} \sqrt{\frac{c}{z_1}}, \quad K_I = \lim_{a \rightarrow \infty} [(K_I)_a]_{b=a-c} = \frac{2P}{\sqrt{2\pi c}}$$

【2・2】き裂がないと考えた場合, 点 $(0, b)$ に集中力 $(0, P)$ が作用すれば, き裂面上にあたる3点 $(\xi, 0) (-a < \xi < a)$ には, $\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = (P/2\pi)[(\kappa-1)/(\kappa+1)][1/(b-\xi)]$ の応力が生じている. したがって, この問題はき裂上面に x 方向の分布力 $q(\xi) = (P/2\pi)[(\kappa-1)/(\kappa+1)][1/(b-\xi)]$ が作用しき裂下面に逆方向の分布力 $-q(\xi)$ が作用する問題と同じである. 例題【2・4】と同様にして

$$(K_{II})_a = \frac{P}{2\sqrt{\pi a}} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}} - 1 \right), \quad (K_{II})_{-a} = \frac{P}{2\sqrt{\pi a}} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(1 - \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \right)$$

【2・3】前問と同様に考えれば, $z=b$ に集中モーメント M が作用すると, x 軸上 $(0, \xi) 1-a < \xi < a$ には $\tau_{xy} = (-M/2\pi)1/(b-\xi)^2, \sigma_x = \sigma_y = 0$ の応力が生じ, したがって問題はき裂上面に y 方向の分布力 $q(\xi) = (-M/2\pi)1/(b-\xi)^2$ が作用し, き裂下面に逆方向の分布力 $-q(\xi)$ が作用する問題と同じである.

$$(K_{II})_a = \frac{-Ma}{2\sqrt{\pi a(b-a)}\sqrt{b^2-a^2}}, \quad (K_{II})_{-a} = \frac{-Ma}{2\sqrt{\pi a(b+a)}\sqrt{b^2-a^2}}$$

【2・4】【2・2】と【2・3】の結果の重ね合わせより

$$(K_{II})_a = \frac{P}{2\sqrt{\pi a}} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}} - 1 \right) + \frac{-Ma}{2\sqrt{\pi a(b-a)}\sqrt{b^2-a^2}}$$

ここで, $b-a=c$ を一定にして $a \rightarrow \infty$ とすれば半無限き裂の応力拡大係数が得られる.

$$K_{II} = \lim_{a \rightarrow \infty} [(K_{II})_a]_{b=a+c} = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} P - \frac{M}{2c} \right)$$

【2・5】 $z=z_1$ での応力は, 図2・36で $W-2a=2b$ を一定にしてき裂長さ $2a$ を十分大きくした場合の $z=a+b+z_1 = (W/2)+z_1$ での応力に等しい. したがって, 式 (2・148), (2・150) で $W\sigma_0=P$ を一定にして $a=(W/2)-b, z=(W/2)+z_1$ として, $W \rightarrow \infty$ として得られる.

$$Z_1(z_1) = \frac{P}{\pi\sqrt{b^2-z_1^2}}, \quad K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi b}}$$

【2・6】式 (2・140b) を用いて $(K_I)_{-b} = \frac{P}{\sqrt{\pi b}} \sqrt{\frac{c+b}{c-b}}$, ここで c を $-c$ で置き換えれば

$$(K_I)_b = \frac{P}{\sqrt{\pi b}} \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$$

【2・7】式(2・140b)を用いて

$$K_{II} = s_0 \sqrt{H \tanh\left(\frac{\pi a}{H}\right)}$$

【2・8】き裂面積 $A = ab$, コンプライアンス $\lambda = 8a^3/Ebh^3 (=2u/P)$, $(d\lambda/dA) = (1/b)(d\lambda/da)$ を考慮して

$$g = \frac{P^2}{2b} \frac{d}{da} \left(\frac{8a^3}{Ebh^3} \right) = \frac{12P^2 a^2}{Eb^2 h^3}$$

【2・9】式(2・140a)より $(K_I)_a - i(K_{II})_a = \frac{Q+iP}{2\sqrt{\pi a}} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} - i\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right)$ が得られ, したがって

$$(K_I)_a = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left(Q \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + P \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right), \quad (K_{II})_a = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left(-P \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + Q \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right)$$

が得られる. $(K_I)_{-a}$, $(K_{II})_{-a}$ は上式で b を, $-b$ と置き換えて得られる.

3章 脆性破壊

【3・1】降伏応力 σ_y として耐力 $\sigma_{0.2}$ をとると, 400K では $340 = 680(B+0.002)^{0.5}$ より $B=0.248$ で, このときの破壊応力は $\sigma_f = 680(0.248+0.24)^{0.5} = 475 \text{ MN/m}^2$ である. 300K における σ_y は 392.6 MN/m^2 で, この温度では $392.6 = 680(B+0.002)^{0.5}$ より $B=0.331$, σ_f は温度に無関係であるから 300K では $475 = 680(0.331+\epsilon)^{0.5}$ より $\epsilon=0.16$ をうる.

【3・2】式(3.5)より $\sigma_c = \sqrt{\frac{5 \times 10^4 \times 0.15 \times 10^{-6}}{28 \times 10^{-10}}} = 5.18 \times 10^3 \text{ MN/m}^2 \approx E/9.7$

【3・3】弾性ひずみエネルギーは $\tau_{xy}^2/2G$ であるから $r_p = G/3872T$

【3・4】板を無限板とみなすと $\sigma_f = K_{Ic}/\sqrt{\pi a}$ であるから, $2a=2 \text{ mm}$ のときの σ_f は $\sigma_f = 892.1 \text{ MN/m}^2$ となる. また $2a=10 \text{ mm}$ になると $\sigma_f = 398.9 \text{ MN/m}^2$ となり, ゆえに σ_f は 493.2 MN/m^2 (約55%) 低下する.

【3・5】 -50°C における g_{Ic} は $g_{Ic} = (5.1 - 3 \times 1.36) \times 10^{-2} = 1.02 \times 10^{-2} \text{ MN/m}$ となり, $\sigma_f = K_{Ic}/\sqrt{\pi a}$ と式(3・52)より $\sigma_f = 377.8 \text{ MN/m}^2$ となる.

【3・6】座標変換式を用いて計算を行えばよい.

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

【3・7】省略

【3・8】Airy の応力関数 ϕ より極座標における応力成分を求める公式を用いて

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} [-D(\ln r + 1)] \sin \theta + \frac{1}{r^2} D r \ln r \sin \theta = -D \frac{\sin \theta}{r} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} [-D(\ln r + 1)] \sin \theta = -D \frac{\sin \theta}{r} \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} (-D \ln r \cos \theta) = D \frac{\cos \theta}{r} \end{cases}$$

【3・9】式(3・33)において $L=d/2$ とすれば $\tau_c = \tau_i + \sqrt{\frac{4G\gamma_i}{d}} = \tau_i + kd^{-1/2}$ (ただし $k = \sqrt{4G\gamma_i}$ で一定値) となり, これに数値を代入して $k=3.28 \text{ MN/m}^{3/2}$, $\tau_i=196.6 \text{ MN/m}^2$ をうる. これより $\tau_c = 930.1 \text{ MN/m}^2$

【3・10】降伏応力として $\sigma_{0.2}$ をとると $\sigma_y = 201.2 \text{ MN/m}^2$, 破壊靱性 g_c は式(3・56)より $g_c = 0.0966 \text{ MN/m} = 96.6 \text{ kJ/m}^2$

4章 疲労破壊

【4・1】省略

【4・2】完全両振りの場合 $R=-1$, $\Delta K = K_{max}$, 完全片振りの場合 $R=0$, $\Delta K = K_{max}/2$ であるから

(1) Forman の式によれば

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{R=-1} = \frac{2^{n-1} C K_{max}^n}{K_c - K_{max}}, \quad \left(\frac{da}{dN} \right)_{R=0} = \frac{C K_{max}^n}{K_c - K_{max}} = 2^{1-n} \left(\frac{da}{dN} \right)_{R=-1}$$

$$\therefore \left(\frac{da}{dN} \right)_{R=-1} / \left(\frac{da}{dN} \right)_{R=0} = 2^{n-1}$$

(2) Roberts-Erdogan の式によれば, $R=-1$ で $\beta=0$, $\Delta K' = \Delta K/2 = K_{max}$, $R=0$ で $\beta=1$, $\Delta K' = K_{max}/2$ なることを考慮して

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{R=-1} = B K_{max}^{2(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{R=0} = 4^{-\sigma_2} B K_{max}^{2(\sigma_1 + \sigma_2)} = 4^{-\sigma_2} \left(\frac{da}{dN} \right)_{R=-1}$$

$$\therefore \left(\frac{da}{dN} \right)_{R=-1} / \left(\frac{da}{dN} \right)_{R=0} = 4^{\sigma_2}$$

(3) Elber の式によれば

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{R=-1} = C(0.2 K_{max})^n, \quad \left(\frac{da}{dN} \right)_{R=0} = C(0.5 K_{max})^n$$

$$\therefore \left(\frac{da}{dN} \right)_{R=-1} / \left(\frac{da}{dN} \right)_{R=0} = \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

【4・3】圧縮応力の作用により grind out 効果が生じ, ΔK_{eff} が増加することによって考えられる.

【4・4】4・3 [3] (c) に述べた評価法より疲労破壊靱性 K_{Ic} を求めると

$$(0.041 \times 10^{-3} \times 600 \times 2.06 \times 10^5)^{1/2} \approx 71 < K_{Ic} (=80)$$

より $K_{Ic} \approx 71 \text{ MN/m}^2$ を得, これに対応するき裂長さ a の値は問題中に示す式より $a \approx 2.1 \text{ cm}$ として求まる.

【4・5】【4・4】と同様に A 材では $(0.041 \times 10^{-3} \times 900 \times 2.06 \times 10^5)^{1/2} = 87.2 < K_{Ic} (=100)$, B 材では $(0.041 \times 10^{-3} \times 700 \times 2.06 \times 10^5)^{1/2} \approx 76.9 > K_{Ic} (=70)$, したがって, A 材の場合の疲労破壊靱性は $K_{Ic} = 87.2 \text{ MN/m}^{3/2}$, B 材のそれは $K_{Ic} = 70 \text{ MN/m}^{3/2}$ となる.

【4・6】A 点, B 点における応力拡大係数の範囲は式(4・47)より, それぞれ A 点では $\Delta K \approx \sqrt{ES/6} \approx 26.6 \text{ MN/m}^{3/2}$, B 点では $\Delta K \approx 84.1 \text{ MN/m}^{3/2}$ と求まる.

【4・7】まず, 式(4・47)よりストライエーション間隔 S は, $S \approx 6(\Delta K/E)^2 \propto \Delta K^2$ で与えられ, また

COD は式 (4・31), (4・33) から $\delta\delta = (A/E\sigma_y) \Delta K^2 \propto \Delta K^2$ として与えられることによる。

5章 環境強度

【5・1】板幅の広い CCT 試験片の K_I は $K_I = 1.80\sigma_n\sqrt{a}$ で与えられるので, SCC をおこさない公称応力は $\sigma_n < K_{I\text{SCC}}/(1.80\sqrt{a})$ より求まり, 173 MN/m^2 となる。また, 不安定破壊の公称応力は $\sigma_n = K_{Ic}/(1.80\sqrt{a})$ より求まり, 550 MN/m^2 となる。

【5・2】板幅の広い DECT 試験片の K_I は $K_I = 2\sigma_n\sqrt{a}$ で与えられるので, それぞれの公称応力は 156 MN/m^2 , 495 MN/m^2 となり, 試験片形状によってこれらの応力値はかなり異なる。

【5・3】それぞれの公称応力は 354 MN/m^2 , 778 MN/m^2 となり, これらの値は 300 M マルエージング鋼に比べて高くなる。

【5・4】式 (5・9) より, $d_1 = C_1 e^{C_2 K_I}$, $d_2 = C_3 (=10^{-6} \text{ m/s})$ において, 式 (5・11) の積分を行うと次式をうる。

$$t_{ic} = \frac{a_f - a_i}{C_3} - \frac{2}{2.06 C_1 C_2 \sigma_n} \left[\frac{\sqrt{a}}{\exp 2.06 C_2 \sigma_n \sqrt{a}} + \frac{1}{2.06 C_2 \sigma_n \exp 2.06 C_2 \sigma_n \sqrt{a}} \right] \frac{a_f}{a_i}$$

ここで, $\sigma_n = 50 \text{ MN/m}^2$, $a_i = 5 \text{ mm}$, $a_f = (K_{Ic}/2.06\sigma_n)^2 = 38 \text{ mm}$, 表より求まる $C_1 = 2.34 \times 10^{-13} \text{ m/s}$, $C_2 = 1.64 (\text{MN/m}^2)^{-1/2}$, $C_3 = 10^{-6} \text{ m/s}$ とおくと, $t_{ic} = 16.2 \text{ h}$ となる。

【5・5】式 (5・10) より, 基準温度 $T_0 [\text{K}]$ および任意温度 $T_0 + \Delta T [\text{K}]$ における領域 II での d_1 の比は次式のようになる。

$$\frac{d_1(T_0 + \Delta T)}{d_1(T_0)} = \exp \left[\frac{\Delta E \Delta T}{RT_0(T_0 + \Delta T)} \right]$$

ここで, $R = 8.32 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$, $T_0 = 298 \text{ K}$, $\Delta T = 60 \text{ K}$ とおくと約 13 倍大きくなる。なお, 式 (5・10) の関係は常に成り立つとは限らないので, その取扱いに注意が必要である。たとえば, 高張力鋼 H-11 鋼の水中および 100% 相対湿度中で $0 \sim 85^\circ \text{C}$ では同式が成り立つが, 水分が飽和しない場合は 25°C 以上の温度で, 温度上昇に伴い da/dt が減り減少し, 式 (5・10) が成り立たない。

【5・6】本文中の図 5・28 を参照して $K_I = K_{I\text{min}} + (dK_I/2)(1 + \sin \omega t)$ とおくと, 式 (5・15) の右辺第 1 項は $\int_0^t (da/dt)_{\text{EAC}} dt = [C_1 + C_2 K_{I\text{min}} + (C_2/2)(dK_I)]/f$ となるから $(da/dN)_{\text{CF}} - (da/dN)_{\text{F}} = [C_1 + C_2 K_{I\text{min}} + (C_2/2)(dK_I)]/f$ となり, この式の示す ΔK_I と f の依存性は本文中の図 5・31 の実験結果の傾向と一致する。ここで, $\omega t = 2\pi$, $f = 1/\tau$ の関係式を用いた。

6章 非線形破壊力学の理論

【6・1】図 6・9, 6・10 の比較からわかるように, 深いき裂をもつ剛完全塑性の両側き裂材のリガメント部の直線すべり線場は変形しない塑性域であり, 拘束係数 L は, ミーゼスの条件にしたがう場合, $L = 2.97 \approx 3$ となるのに対し, 中央き裂材のそれはミーゼスの条件にしたがう場合, $L = 1.16$ と小さい。このように前者の塑性拘束の大きくなるのが p の正値が大きくなる原因である。また, p 値が大きくなることとかわかって, 前者の正味断面応力 σ_{net} は後者のその 2.57 倍となり, 不安定破壊がおこしやすい。

【6・2】平面応力 (図 6・11 参照) では, き裂先端での塑性降伏は直線状のくびれを生じ, すべり分離を起こすのに対し, 平面ひずみ (図 6・9 参照) では, き裂先端部の扇形状に局部集中することと著しい違いがある。後者の塑性拘束は前者のそれより 2.57 倍大きく, 同様にして後者の正味断面応力は前者のそれより 2.57 倍大きくなる。

【6・3】図 6・16(a) において, き裂表面には外力が作用しないから QRS 内のすべり線はき裂表面と 45° 傾く直線すべり線場であり, また, 領域 RTR 内のすべり線は対数らせんであり, $OT = R$ とおくと $R = \rho(e^{x/2} - 1)$ あるいは $R = 1.9\delta$ (1) で表される。さらに, 領域 RQPT はすべり線 QR と RT によって唯一的に求まる。すなわち, RT に直交するすべり線は直線で, その長さは一定であるから, 領域 O'PTP 内のすべり線も直線となる。なお, $RS = O'T = b - \rho(e^{x/2} - 1)$ (2) である。正味断面の軸応力 σ_y は, き裂底から点 T に達するまでは対数らせん状のすべり線場にもとづく $\sigma_y = 2k \ln [1 + (x/\rho)]$ (3) にしたがって増加するが, 領域 O'PTP 内のすべり線場は直線場であるから, TO' 上の応力は一定となる。すなわち, 式 (3) に $x = \rho(e^{x/2} - 1)$ を代入すると $\sigma_y = 2k[1 + (\pi/2)] = \text{一定}$ となる (図 6・16(b) 参照)。ゆえに, $P_L = 2B \int_0^{\rho(e^{x/2} - 1)} \sigma_y dx + 2 \times 2kB [1 + (\pi/2)] [b - \rho(e^{x/2} - 1)] = 4kB\rho(\pi/2)e^{x/2} + 4kB[1 + (\pi/2)][b - \rho(e^{x/2} - 1)] = 4kB\rho[1 + (\pi/2) - (\rho/b)(e^{x/2} - 1 - (\pi/2))]$ (4) ただし, 式 (4) は式 (2) より $b/\rho \geq e^{x/2} - 1$ で成り立つ。したがって

$$L = \frac{P_L}{2\sigma_y bB} = \begin{cases} 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{b}(e^{x/2} - 1 - \frac{\pi}{2}) & \text{(Tresca)} \\ 1.16[1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{b}(e^{x/2} - 1 - \frac{\pi}{2})] & \text{(Mises)} \end{cases} \quad (5)$$

$$\sigma_{\text{net}} = \frac{P_L}{2bB} = 2k \left[\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\rho}{b}(e^{x/2} - 1 - \frac{\pi}{2}) \right] \quad (6)$$

$$Q = \frac{(\sigma_y)_{\text{max}}}{\sigma_y} = 1 + \frac{\pi}{2} = 2.57 \text{ (Tresca)}, 2.97 \text{ (Mises)} \quad (7)$$

【6・4】【6・3】の式 (4)~(7) で $\rho/b \rightarrow 0$ とおくと次式のようになる。

$$P_L = 4kBb \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = 2.57 \times 4kBb \quad (1)$$

$$L = Q = 2.57 \text{ (Tresca)}, 2.97 \text{ (Mises)} \quad (2)$$

$$\sigma_{\text{net}} = 2.57 \times 2k \quad (3)$$

これらは, 本文 6・2[4] で述べた結果と一致する。

【6・5】有限幅に対する L の下界は容易に求まる。すなわち, P_L が $2\sigma_y BW$ より大きいと, 矩形柱の両端近傍が単純引張下で先に降伏してしまうから, $P_L < 2\sigma_y BW$ でなければならないことは明らかである。これは, いわゆる拘束降伏 (constrained yielding) が起こるための条件である。いいかえれば, W/b は拘束係数 L より小であってはならない。【6・3】の式 (4) を例をとると, この条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{b} &> 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{b}(e^{x/2} - 1 - \frac{\pi}{2}) & \text{(Tresca)} \\ \frac{W}{b} &> 1.16 \left[1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{b}(e^{x/2} - 1 - \frac{\pi}{2}) \right] & \text{(Mises)} \end{aligned} \right\} \quad \left(\text{ただし, } \frac{b}{\rho} \geq e^{x/2} - 1 \right) \quad (1)$$

となる。たとえば, $b/\rho = 4$ のとき, 解を適用できる W/b の最小値は約 2 (Tresca) あるいは 2.3 (Mises) となる。なお, $0 \leq (b/\rho) \leq e^{x/2} - 1$ のときは, 【6・3】の式 (3) より

$$P_L = 2B \int_0^{\rho} \sigma_y dx = 4kBb \left(1 + \frac{\rho}{b}\right) \ln \left(1 + \frac{b}{\rho}\right) \quad (2)$$

となり、したがって

$$L = \left(1 + \frac{\rho}{b}\right) \ln \left(1 + \frac{b}{\rho}\right) \quad (\text{Tresca}), \quad 1.16 \left(1 + \frac{\rho}{b}\right) \ln \left(1 + \frac{b}{\rho}\right) \quad (\text{Mises}) \quad (3)$$

となる。ゆえに、たとえば $b/\rho=1$ のように半円形両側切欠き材の場合の W/b の最小値は、式 (3) より約 1.39 (Tresca), 1.60 (Mises) となる。しかし、このように浅い切欠きの場合は実際にはこのようにならず、 $b/\rho=1$ に関する数値解析結果では 1.22 となる。

【6・6】図 A²⁴⁾ の (a) に示すような対称な応力場は以下の (i)~(iii) の条件を満足するとき静的に可容である。すなわち、(i) 境界条件、(ii) 応力のつり合い式。ただし、AB, CD, AO, BO, CO, DO 表面に垂直な直接応力の不連続性のみが許容され、これらの条件は AB, CD をよぎるとき自動的に満足されるので、不連続線 AO と CO のみを考えればよい。このことは、四つの応力のつり合い式を準備すればよいことを示す。(iii) 降伏条件を破らないこと。この条件は領域 AOB, COD, AOC に対する三つの不等式を準備する。

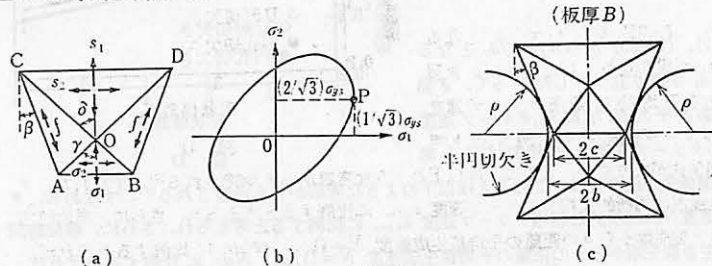


図 A

条件 (ii) について、AO をよぎる垂直応力 σ とせん断応力 τ の連続性より

$$\sigma = \sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_2 \cos^2 \gamma = f \sin^2 (\beta + \gamma) \quad (1)$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \gamma \cos \gamma = f \sin (\beta + \gamma) \cos (\beta + \gamma) \quad (2)$$

ゆえに

$$\sigma_1 = f \sin (\beta + \gamma) \cos \beta / \sin \gamma, \quad \sigma_2 = f \sin (\beta + \gamma) \sin \beta / \cos \gamma \quad (3)$$

同様に、CO をよぎる連続性より

$$s_1 = f \sin (\delta - \beta) \cos \beta / \sin \delta, \quad s_2 = f \sin (\delta - \beta) \sin \beta / \cos \delta \quad (4)$$

条件 (iii) については、式 (6・3) より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 &\leq \sigma_{ys}^2 & (\text{領域 AOB について}) \\ f &\leq \sigma_{ys} & (\text{領域 AOC について}) \\ s_1^2 + s_2^2 - s_1 s_2 &\leq \sigma_{ys}^2, \quad s_1 \leq \sigma_{ys} & (\text{領域 COD について}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

等式 (3), (4), 不等式 (5) より、 β の項で表した七つの未知数 $\sigma_1, \sigma_2, f, s_1, s_2, \gamma, \delta$ を解けばよい。すなわち、式 (3) から σ_1, σ_2 を式 (5) の第 1 式に代入し、式 (4) から s_1, s_2 を式 (5) の第 3 式に代入して

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 (\beta + \gamma) \left(\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \gamma} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma} \right) &\leq \left(\frac{\sigma_{ys}}{f} \right)^2 \\ \sin^2 (\delta - \beta) \left(\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \delta} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \delta} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \delta} \right) &\leq \left(\frac{\sigma_{ys}}{f} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を得、式 (6) より γ, δ が σ_{ys}/f の項で求められる。ここで、AB をよぎる荷重は σ_1 が最大であれ

ば最大となる。領域 AOB がミーゼスの条件にしたがう場合、図 (b) の P 点に相当する $(\sigma_1)_{\max} = (2/\sqrt{3})\sigma_{ys}$, $\sigma_2 = (1/\sqrt{3})\sigma_{ys}$ となるから、式 (3) より次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \cot \beta \cot \gamma &= 2 \\ \sin (\beta + \alpha) \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{ys}}{f} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

あるいは上二式より

$$\cos^2 \beta = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{ys}}{f} \right) \quad (8)$$

式 (5) の第 2 式と式 (7) の第 3 式より

$$\cos^2 \beta \leq 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{あるいは} \quad \beta \geq 23^\circ \quad (8)$$

$\beta = 23^\circ$ のとき、 $f = \sigma_{ys}$ となって領域 AOC は完全塑性となる。また、 $\beta = 23^\circ$ のとき、不等式 (6) の第 2 式は $\delta \leq 61^\circ 15'$ について満足される。この $\delta = 60^\circ 15'$ のとき、 $s_1 = 0.650\sigma_{ys}$, $s_2 = -0.505\sigma_{ys}$ となる。以上より、四つの領域は次のとき完全塑性となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ys}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{ys}, \quad s_1 = 0.650 \sigma_{ys}, \quad s_2 = -0.505 \sigma_{ys} \\ \beta &= 23^\circ, \quad \gamma = 49^\circ 40', \quad \delta = 61^\circ 15' \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

いま、図 (c) に示すように、き裂面に接する台形状の可容応力場の形状から

$$\frac{c}{d} = 1 - \left(\frac{\rho}{b} \right) \left[\frac{(1 - \cos \beta)}{\cos \beta} \right] \quad (10)$$

ゆえに、拘束係数 L に対する下界は式 (10) を用いて

$$\begin{aligned} L(\text{下界}) &= \frac{P_L}{2\sigma_{ys}Bb} = \frac{\sigma_1 2bB}{2\sigma_{ys}Bb} \left(1 - \frac{\rho}{b} \frac{1 - \cos \beta}{\cos \beta} \right) \\ &= \frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}} \left(1 - \frac{\rho}{b} \frac{1 - \cos \beta}{\cos \beta} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、角 β は L (下界) が最大となるように選ばれる。 $\partial L / \partial \beta = 0$ すなわち

$$\frac{\partial (\sigma_1 / \sigma_{ys})}{\partial \beta} \left[1 - \frac{\rho}{b} \left(\frac{1 - \cos \beta}{\cos \beta} \right) \right] - \frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}} \frac{\rho}{b} \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} = 0$$

より β を求め、これを式 (11) に代入して L (下界) を求めると表 A²⁴⁾ のとおりとなる。ここで、 $\partial (\sigma_1 / \sigma_{ys}) / \partial \beta$ と (σ_1 / σ_{ys}) は、 $0 \leq \beta \leq 23^\circ$ については、式 (3) の第 1 式で $f = \sigma_{ys}$ 、とおいた式より、 $\beta \geq 23^\circ$ については、 $\sigma_1 / \sigma_{ys} = 2/\sqrt{3} = \text{一定}$ より求められる。

表 A 拘束係数に対する上界と下界

$2b/(2b+\rho)$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
L (下界)	1.155	1.133	1.118	1.102	1.087	1.072	1.057	1.040	1.025	1.012
L (上界)	1.155	1.146	1.135	1.120	1.096	1.075	1.057	1.040	1.025	1.012

上表には、比較のため、上界値を示したが、両者はほとんど等しく、正解である。

【6・7】【6・6】の式 (11) で $\rho/b \rightarrow 0$ とおくと、 $L(\text{下界}) = \sigma_1 / \sigma_{ys} = 2/\sqrt{3} = 1.16$ (ミーゼス) となり、また、 $Q = (\sigma_1)_{\max} / \sigma_{ys} = 2/\sqrt{3} = 1.16$ (ミーゼス) となって本文 6・2[4] で述べた結果と一致する。

【6・8】図 B²⁴⁾ を参照して、 $\beta = 23^\circ$, $s = -\sigma_{ys}$ のとき、 $\sigma_1 = (2/\sqrt{3})\sigma_{ys}$ となるが、 $0 \leq \beta \leq 23^\circ$, $s = -\sigma_{ys}$ では、 σ_1 は【6・6】の式 (3) の第 1 式で与えられる。台形状の可容応力場す法は次式で与えら

